

Algebra 2*, zadania na ćwiczenia, seria V

Twierdzenie Hilberta o zerach i składowe zbioru algebraicznego. Ideały prymarne.

- Łatwy dowód *Nullstellensatz* dla ciał nieprzeliczalnych. Załóżmy, że K jest nieprzeliczalnym ciałem. Niech $K \subset L$ będzie rozszerzeniem ciał, takim że L jest skończenie generowaną K -algebrą.
 - Pokaż, że L ma przeliczalną bazę nad K , wobec czego dla każdego $b \in L \setminus K$ zbiór $\{\frac{1}{b-a}\}_{a \in K}$ jest liniowo zależny nad K .
 - Wykorzystaj liniową zależność powyższych elementów by znaleźć wielomian w $K[x]$, którego pierwiastkiem jest b . Wywnioskuj z tego, że rozszerzenie $K \subset L$ jest skończone.
- Opisz wszystkie ideały maksymalne w $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Pokaż, że zbiór algebraiczny odpowiadający ideałowi maksymalnemu $\mathfrak{m}$ w $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ jest punktem lub jest pusty. Wskazówka: rozpatrz rozszerzenie $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}$.
- Rozpatrzmy ideał $J = (xy + yz + zx, xyz) \triangleleft \mathbb{C}[x, y, z]$. Znajdź nieprzywiedlne składowe zbioru $V(J) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$ i podaj ich ideały. Rozstrzygnij czy ideał J jest radykalny czyli $\sqrt{J} = J$.
- Ideał $\mathfrak{q}$ w pierścieniu A nazywamy prymarnym jeśli dla $a, b \in A$ jeśli $ab \in \mathfrak{q}$ to $a \in \mathfrak{q}$ lub $b^m \in \mathfrak{q}$ dla pewnego dodatniego m . Pokaż, że jest to równoważne temu, że jedyne dzielniki zera w $A/\mathfrak{q}$ to elementy nilpotentne.
 - Pokaż, że radykał ideału prymarnego jest ideałem pierwszym.
 - Pokaż, że jeśli radykał ideału jest maksymalny to ideał jest prymarny.
 - Pokaż, że radykał ideału (x^2, yx) w $k[x, y]$ jest pierwszy ale ten ideał nie jest prymarny.
- Niech $f \in \mathbb{C}[x, y]$ będzie nierozkładalnym wielomianem drugiego stopnia. Niech $\mathbb{C}[V(f)] = \mathbb{C}[x, y]/(f)$ oznacza pierścień funkcji regularnych na $V(f)$ natomiast $\mathbb{C}(V(f))$ jego ciało ułamków. Pokaż, że $\mathbb{C}[V(f)]$ jest izomorficzny z $\mathbb{C}[t]$ lub $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ z czego wynika, że $\mathbb{C}(V(f))$ jest izomorficzny z $\mathbb{C}(t)$.

6. Rozpatrzmy względnie pierwsze wielomiany $f, g \in \mathbb{C}[t]$. Pokaż, że jeśli cztery różne (nieproporcjonalne) kombinacje liniowe (nad $\mathbb{C}$) wielomianów f i g są kwadratami w $\mathbb{C}[t]$ to $f, g \in \mathbb{C}$. Wskazówka: dowód niewprost, można założyć, że $f, g, f - g$ oraz $f - \lambda g$ są kwadratami (gdzie $0 \neq \lambda \neq 1$) oraz minimum stopni f i g jest najmniejsze wśród tych par, które nie spełniają tezy zadania.
7. [Zadanie trudniejsze.] Niech $F \in \mathbb{C}[x, y]$ będzie nierozkładalnym wielomianem trzeciego stopnia postaci $F = y^2 - x(x - 1)(x - \lambda)$ gdzie $0 \neq \lambda \neq 1$
 - (a) Pokaż, że $V(F)$ nie można sparametryzować za pomocą funkcji wymiernych; to jest: jeśli $f, g \in \mathbb{C}(t)$ takie, że $f^2 = g(g-1)(g-\lambda)$ to $f, g \in \mathbb{C}$. Wskazówka: przedstaw $f = r/s, g = p/q$ w postaci nieskracalnego ilorazu wielomianów i pokaż, że (z dokładnością do stałej) wielomiany $p, q, p - q$ i $p - \lambda q$ są kwadratami w $\mathbb{C}[t]$.
 - (b) Pokaż, że ciało ułamków pierścienia ilorazowego $\mathbb{C}[x, y]/(F)$, czyli $\mathbb{C}(V(F))$, jest wymiaru przestępnego 1 nad $\mathbb{C}$ i nie jest izomorficzne z ciałem funkcji wymiernych $\mathbb{C}(t)$.
 - (c) Znajdź wielomian trzeciego stopnia $F \in \mathbb{C}[x, y]$ taki, że $\mathbb{C}(V(F))$ jest izomorficzne z $\mathbb{C}(t)$.