

Algebra 2*, zadania na ćwiczenia, seria IV

Rozszerzenia ciał i pierścieni. Całkowite domknięcie.

Materiał z ostatniego wykładu i więcej zadań (oraz rozwiązania niektórych z podanych poniżej problemów) znajdują Państwo w rozdziale 4 książki Milesa Reida *Undergraduate Commutative Algebra* lub rozdziale 5 książki Atiyah—Macdonald, *Introduction to commutative algebra*.

1. Przypomnijmy, że normalizacja dziedziny to jej całkowite domknięcie w jej ciele ułamków. Pokaż, że normalizacja następujących pierścieni ilorazowych jest izomorficzna z $\mathbb{C}[t]$, gdzie $t = y/x$:

(a) $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3)$

(b) $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3 - x^2)$

2. Rozpatrzmy rozszerzenie ciał $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{n})$ gdzie liczba naturalna n nie jest podzielna przez kwadrat liczby całkowitej.

(a) Pokaż, że jeśli $4 \nmid n - 1$ to całkowitym domknięciem $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ jest $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.

(b) Pokaż, że jeśli $4 \mid n - 1$ to całkowitym domknięciem $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ jest $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{n})/2]$.

3. Sprawdź bezpośrednio, że każdy element $k[t]$ jest całkowity nad $k[t^2]$: Dla $f \in k[t]$, $f(t) = \sum a_i t^i$, znajdź wielomian unormowany stopnia 2 nad pierścieniem $k[t^2]$, którego pierwiastkiem jest f .

4. Niech $A \subset B$ będzie całkowitym rozszerzeniem pierścieni. Niech $\mathfrak{p}$ będzie ideałem pierwszym w B a $S \subset A$ pewnym systemem multiplikatywnym w A .

(a) Pokaż, że A jest ciałem wtedy i tylko wtedy gdy B jest ciałem.

(b) Pokaż, że pierścień ilorazowy $B/\mathfrak{p}$ jest całkowity nad $A/A \cap \mathfrak{p}$.

(c) Pokaż, że $\mathfrak{p}$ jest maksymalny w B wtedy i tylko wtedy gdy $A \cap \mathfrak{p}$ jest maksymalny w A .

(d) Pokaż, że rozszerzenie lokalizacji $S^{-1}A \subset S^{-1}B$ jest całkowite.

5. Niech $A \subset B$ będzie skończonym rozszerzeniem pierścieni.

- (a) Pokaż, że dla każdego ideału maksymalnego I w A istnieje co najmniej jeden ideał maksymalny J w B taki, że $J \cap A = I$. Wskazówka: skorzystaj z lematu Nakayamy.
- (b) Czy powyższe stwierdzenie jest prawdziwe, jeśli ideały maksymalne zastąpić pierwszymi?
- (c) Czy założenie skończoności rozszerzenia $A \subset B$ jest konieczne?

Wskazówka: zob. Atiyah-Macdonald, rodz. 5.

6. Niech k będzie ciałem algebraicznie domkniętym, $\text{char } k \neq 2$, połóżmy $A = k[t]$. Dla wielomianu $f \in A$, postaci $f = \prod (t - a_i)^{n_i}$, gdzie $a_i \neq a_j$ dla $i \neq j$ oraz $n_i \geq 1$, weźmy pierścień ilorazowy $B = k[t, x]/(x^2 - f)$ obraz x oznaczając przez $\sqrt{f}$.
 - (a) Znajdź warunek na to, żeby B było dziedziną. W następnych pytaniach zakładamy, że B jest dziedziną.
 - (b) Pokaż, że całkowite domknięcie A w ciele ułamków (B) jest równe całkowitemu domknięciu B w swoim ciele ułamków.
 - (c) Znajdź warunek na to by pierścień B był normalny, to jest całkowicie domknięty w ciele swoich ułamków.
7. Dla ułatwienia $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ oznaczamy przez $\mathbb{N}$. Niech $\Gamma \subset \mathbb{N}^n$ będzie skończone generowaną podpółgrupą, dla której definiujemy $C(\Gamma) = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ stożek generowany w $\mathbb{R}^n$ przez Γ . Ponadto definiujemy podpierścień $k[\Gamma] \subset k[x_1, \dots, x_n]$ rozpięty (jako k -przestrzeń) na jednomianach $x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n}$, gdzie $\gamma \in \Gamma$.
 - (a) Niech $\bar{\Gamma} = C(\Gamma) \cap \mathbb{Z}^n$. Pokaż, że $\bar{\Gamma} = \{\gamma \in \mathbb{Z}^n \mid \exists m > 0 : m\gamma \in \Gamma\}$.
 - (b) Pokaż, że rozszerzenie $k[\Gamma] \subset k[\bar{\Gamma}]$ jest całkowite.
 - (c) Pokaż, że pierścień $k[\bar{\Gamma}]$ jest całkowicie domknięty w $k[\mathbb{N}^n] = k[x_1, \dots, x_n]$. Wskazówka: jeśli $f \in k[\mathbb{N}^n]$ spełnia równanie $f^m + a_{m-1}f^{m-1} + \cdots + a_1f + a_0 = 0$, gdzie $a_i \in k[\Gamma]$, i nie wszystkie wykładniki jednomianów w f są w $C(\Gamma)$, to można wybrać formę liniową λ na $\mathbb{R}^n$ taką, że wartość λ na wykładniku dokładnie jednego jednomianu z f jest dodatnia natomiast na pozostałych jednomianach z f oraz na $C(\Gamma)$ forma λ przyjmuje wartości ujemne.
 - (d) Pokaż, że pierścień $k[\bar{\Gamma}]$ jest normalny.