Algebra 2*, zadania na ćwiczenia, seria III
Więcej o modułach, produkt tensorowy i lokalizacja.

Materiał do tej serii zadań mogą Państwo znaleźć w książce Atiyah, Macdonald, *Commutative Algebra* tu jest skan drugiego rozdziału i w ksiażce Reida, *Undergraduate Commutative Algebra*, tu jest skan szóstego rozdziału.

Oznaczenia: A jest pierścieniem przemiennym z jednością i jeśli nie jest powiedziane inaczej, to moduły są zdefiniowane nad A i zwykle oznaczane literami M, N, W, natomiast 0 oznacza moduł zerowy, $\oplus$ oznacza sumę prostą (produkt) modułów, $\otimes = \otimes_A$ ich produkt tensorowy (nad A). Ponadto $\mathrm{Hom}(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)$ oznacza moduł A-homomorfizmów z M do N z dodawaniem i mnożeniem "po wartościach".

1. Pokazać, że $\mathbb{Z}_a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_b = 0$ o ile a i b są wzglednie pierwsze. Znaleźć formułę na $\mathbb{Z}_{p^r} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^s}$, gdzie p jest liczbą pierwszą.

2. Dla homomorfizmu A-modułów $h : N_1 \to N_2$ homomorfizm $id_M \otimes h : M \otimes N_1 \to M \otimes N_2$ definiujemy wzorem (sprawdź, że dobrze)
$$(id_M \otimes h)(m \otimes n) = m \otimes h(n)$$
   (a) Pokazac, że jeśli h jest suriektywny to również $id_M \otimes h$ jest suriektywny.
   (b) Pokazać, że jeśli h jest injektywny to $id_M \otimes h$ może nie być injekcją.
   (c) Pokazać, że jeśli ciąg $M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ jest dokładny to i ciąg $N \otimes M_1 \to N \otimes M_2 \to N \otimes M_3 \to 0$ jest dokładny.

3. O ile morfizm $id_M \otimes h$ jest injektywny dla każdego homomorfizmu injektywnego A-modułów $h : N_1 \to N_2$ to moduł M nazywamy płaskim.
   (a) Pokazać, że jeśli N jest płaski i ciąg $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ jest dokładny to i ciąg $0 \to N \otimes M_1 \to N \otimes M_2 \to N \otimes M_3 \to 0$ jest dokładny.
   (b) Pokaż, że jeśli M jest płaski a I jest ideałem w A to odwzorowanie mnożenia $I \otimes M \to M$ jest włożeniem z obrazem IM.
   (c) Pokazać, że każdy skończenie generowany moduł wolny jest płaski.

4. Pokazać, że każdy skończenie generowany płaski moduł nad $\mathbb{Z}$ jest wolny. Czy poprzednie zdanie zostanie prawdziwe jeśli zastąpimy $\mathbb{Z}$ przez dowolny DIG?

5. Niech A będzie pierscieniem lokalnym z ideałem maksymalnym $\mathfrak{m}$ oraz ciałem rezidualnym $k = A/\mathfrak{m}$. Ponadto niech M będzie skończenie generowanym A modułem. Przypomnijmy lemat Nakayamy: Jeśli $\mathfrak{m}M = M$ to $M = 0$.

   (a) Pokaż, że elementy $m_1, \ldots, m_r$ generują M nad A wtedy i tylko wtedy ich obrazy generują przestrzeń wektorową $M/\mathfrak{m}M$ nad $k = A/\mathfrak{m}$.

   (b) Pokazać, że jeśli M i N skończenie generowanymi A-modułami i $M \otimes_A N = 0$ to $M = 0$ lub $N = 0$.

   (c) Pokazać, że każdy skończenie generowany płaski moduł nad pierścieniem lokalnym jest wolny.

6. Rozszerzanie i zawężanie współczynników. Niech $f : A \to B$ będzie homomorfizmem pierścieni; B jest wówczas A-algebrą i w szczególności A-modułem z mnożeniem zadanym wzorem $a \cdot b := f(a) \cdot b$ dla $a \in A$ i $b \in B$. Dla A-modułu M definiujemy $M_B = B \otimes_A M$. Pokazać, że M_B jest dobrze zdefiniowanym B-modułem. Jeśli N jest B-modułem to jest też A modułem z mnożeniem $a \cdot n = f(a) \cdot n$.

   (a) Pokazać, że jeśli M jest skończenie generowany nad A to M_B jest skończenie generowany nad B.

   (b) Pokazac, że jeśli N jest skończenie generowany nad B i B jest skończenie generowanym A-modułem to N też jest skończenie generowanym A-modułem.

   (c) Pokazać izomorfizm $\mathrm{Hom}_B(M_B, N) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, N)$.

   (d) Pokazać izomorfizm $M_B \otimes_B N \simeq M \otimes_A N$.

7. Pokaż, że dla dowolnego ideału $I \triangleleft A$ i dla dowolnego A-modułu M produkt $(A/I) \otimes_A M$ jest izomorficzny z ilorazem $M/(IM)$, zarówno jako A-moduł jak i A/I-moduł. Pokaż, że dla dowolnego systemu multiplikatywnego $S \subset A$ i dla dowolnego A-modułu M lokalizacja $S^{-1}M$ jest izomorficzna, jako $S^{-1}A$-moduł, z produktem $S^{-1}A \otimes_A M$.

8. Niech $h : M \to N$ będzie homomorfizmem A modułów. Dla dowolnego ideału pierwszego $\mathfrak{p} \triangleleft A$ przez $h_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ oznacza indukowany homomorfizm lokalizacji.

(a) Pokaż, że jeśli $M_{\mathfrak{m}} = 0$ dla każdego ideału maksymalnego $\mathfrak{m}$ w A to $M = 0$.

(b) Pokaż, że h jest injekcją wtedy i tylko wtedy gdy $h_{\mathfrak{m}}$ jest injekcją dla każdego ideału maksymalnego $\mathfrak{m}$ w A.

(c) Pokaż, że h jest surjekcją wtedy i tylko wtedy gdy $h_{\mathfrak{m}}$ jest surjekcją dla każdego ideału maksymalnego $\mathfrak{m}$ w A.

9. Niech A będzie dziedziną. Przypomnijmy, że element $m \in M$ nazywamy torsyjnym jeśli istnieje niezerowe $a \in A$ takie, ze $am = 0$. Zbiór elementów torsyjnych w M jest podmodułem, oznaczanym M_{tor}. Pokaż, że jeśli (A) jest ciałem ułamków A, to $(A) \otimes_A M \simeq (A) \otimes_A (M/M_{tor})$ oraz M_{tor} jest jądrem odwzorowania $M = A \otimes M \to (A) \otimes M$.

10. Topologia Zariskiego. Przypomnijmy, że $\mathrm{Spec}(A)$ oznacza zbiór wszystkich ideałów pierwszych w pierścieniu A. Dla dowolnego ideału I w A definiujemy $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : \mathfrak{p} \supset I\}$.

    (a) Pokaż, że $V(I) = V(\sqrt{I})$, gdzie $\sqrt{I} = \{a \in A : \exists n > 0 \quad a^n \in I\}$ oznacza radykał I.

    (b) Pokaż, że na $\mathrm{Spec}(A)$ istnieje topologia, w której wszystkie zbiory domknięte są postaci $V(I)$.

    (c) Pokaż, że zbiory postaci $U_f = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : f \notin \mathfrak{p}\}$, dla $f \in A$, stanowią bazę tej topologii.

    (d) Pokaż, że homomorfizm $A \to A_f$, gdzie A_f oznacza lokalizację A względem $\{1, f, f^2 \cdots\}$, zadaje ciągłe włożenie $\mathrm{Spec}(A_f) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$, którego obrazem jest U_f.