

Algebra 2*, zadania na ćwiczenia, seria II

Krótki wstęp do kategorii i funktorów.

W tej serii jest dużo zadań ale są (z reguły) łatwe lub bardzo łatwe. Najpierw definicje, które zapewne Państwo znają lub poznać łatwo mogą. Źródłem jest bardzo dużo, na przykład:

- Adamek, Herrlich, Stecker, Abstract and concrete categories.
- Freyd, Abelian Categories

Kategoria. Kategoria $\mathcal{C}$ to klasa obiektów $\text{Obj}_{\mathcal{C}}$ oraz klasa morfizmów: dla każdej pary obiektów $A, B \in \text{Obj}_{\mathcal{C}}$ mamy dany zbiór morfizmów $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, które zapisujemy jako strzałki $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \ni f : A \rightarrow B$. Morfizmy można składać czyli istnieje operacja $\circ_{\mathcal{C}}$:

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \ni (f, g) \longrightarrow g \circ_{\mathcal{C}} f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

Składanie morfizmów jest łączne oraz w zbiorze $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ mamy wyróżniony morfizm identyczności id_A , który jest neutralny dla operacji składania.

Funktor. To “homomorfizm kategorii” $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, a dokładniej odwzorowanie obiektów $\Phi_{\text{Obj}} : \text{Obj}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Obj}_{\mathcal{D}}$ oraz morfizmów: zachowujące kierunek strzałek $\Phi_{\text{Mor}} : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\Phi_{\text{Obj}}(A), \Phi_{\text{Obj}}(B))$ (czyli funktor kowariantny) lub je odwracające $\Phi_{\text{Mor}} : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\Phi_{\text{Obj}}(B), \Phi_{\text{Obj}}(A))$ (czyli funktor kontrawariantny). Zakładamy, że funktory przeprowadzają identyczności na identyczności oraz są zgodne ze składaniem morfizmów.

Naturalna transformata funktorów. Załóżmy, że mamy dwa kowariantne funktory $\Phi, \Psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Naturalna transformata funktorów $\mu : \Phi \rightarrow \Psi$ jest zadana przez klasę morfizmów $\mu_A : \Phi_{\text{Obj}}(A) \rightarrow \Psi_{\text{Obj}}(A)$, gdzie $A \in \mathcal{C}$, które dla każdej pary $A, B \in \text{Obj}_{\mathcal{C}}$ i $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ spełniają warunek przemienności

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{\text{Obj}}(A) & \xrightarrow{\Phi_{\text{Mor}}(f)} & \Phi_{\text{Obj}}(B) \\ \mu_A \downarrow & & \downarrow \mu_B \\ \Psi_{\text{Obj}}(A) & \xrightarrow{\Psi_{\text{Mor}}(f)} & \Psi_{\text{Obj}}(B) \end{array}$$

Jeśli dodatkowo każde μ_A jest izomorfizmem to mówimy, że μ jest naturalną równoważnością (lub izomorfizmem) funktorów. Takie same definicje stosujemy dla funktorów kontrawariantnych.

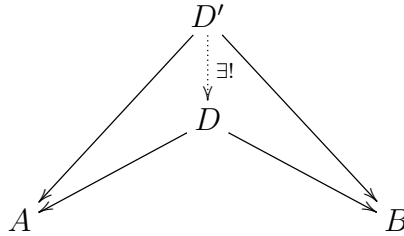
Izomorfizm i równoważność kategorii. Kategorie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ są izomorficzne o ile istnieją funktory $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ i $\Psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ takie, że $\Phi \circ \Psi$ oraz $\Psi \circ \Phi$ są funktorami identyczności na, odpowiednio, $\mathcal{D}$ i $\mathcal{C}$. Kategorie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ są równoważne o ile istnieją funktory Φ i Ψ takie, że $\Phi \circ \Psi$ oraz $\Psi \circ \Phi$ są naturalnie równoważne z funktorami identyczności.

1. Pokaż, że zbiory oraz struktury algebraiczne (grupy, grupy abelowe, pierścienie przemienne, przestrzenie wektorowe nad ustalonym ciałem k itd) i przestrzenie topologiczne wraz z ich odwzorowaniami, odpowiednimi homomorfizmami, tworzą kategorie. Oznaczamy je $\mathcal{Set}$, $\mathcal{Gr}$, $\mathcal{Ab}$, $\mathcal{Ring}$, $\mathcal{Vect}_k$, $\mathcal{Top}$ itd. Pokaż, że zapominanie o operacjach algebraicznych daje funktor pomiędzy odpowiednimi kategoriami (funktor zapominania).
2. Pokaż, że kategoria z jednym obiektem jest monoidem (półgrupą z jednością) a funktory takich kategorii to ich homomorfizmy.
3. Funktor $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ nazywamy wiernym (odpowiednio, pełnym) jeśli odwzorowanie na strzałkach $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\Phi_{\text{Obj}}(A), \Phi_{\text{Obj}}(B))$ jest injekcją (surjekcją). Pokaż, że abelianizacja grupy zadaje funktor kowariantny z $\mathcal{Gr}$ do $\mathcal{Ab}$. Czy jest to funktor wierny? pełny?
4. Zdefiniuj izomorfizm obiektów oraz odwrotność morfizmu w sposób kategoryjny.
5. Niech $(S, \leq)$ będzie zbiorem z częściowym porządkiem. Pokaż, że $(S, \leq)$ definiuje kategorię, której obiektami są elementy z S a morfizmami nierówności pomiędzy nimi.
6. Obiekt A nazywamy obiektem początkowym kategorii $\mathcal{C}$ jeśli ma dokładnie jedno odwzorowanie w każdy obiekt kategorii. Podobnie definiujemy obiekt końcowy kategorii. Pokaż, że obiekt początkowy (końcowy) w kategorii jest jeden z dokładnością do izomorfizmu. Zbadaj czy kategorie rozpatrywane w pozostałych zadaniach mają obiekt początkowy. Czy mają obiekt końcowy?
7. Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią z wyróżnionym obiektem A . Pokaż, że odwzorowanie $B \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ oraz

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \ni f \longrightarrow (\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \ni g \rightarrow f \circ g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C))$$

definiuje kowariantny funktor z $\mathcal{C}$ w kategorię zbiorów $\mathcal{Set}$. Oznaczmy go $\mathfrak{h}_A : B \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Zdefiniuj podobnie funktor kontrawariantny $\mathfrak{h}^A : B \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$. Pokaż, że morfizm $A' \rightarrow A$ daje naturalną transformację funktorów $\mathfrak{h}_A \rightarrow \mathfrak{h}_{A'}$ i $\mathfrak{h}^{A'} \rightarrow \mathfrak{h}^A$.

8. Lemat Yonedy. Dla danej kategorii $\mathcal{C}$ definiujemy jej kategorię funktorów $\widehat{\mathcal{C}}$, w której obiektami są funktory kontrawariantne $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Set}$ a morfizmami naturalne transformaty takich funktorów. Rozpatrzmy funktor $\widehat{\Phi} : \mathcal{C} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ taki, że $\widehat{\Phi}_{\text{Obj}}(A) = \mathfrak{h}_A$ a na morfizmach $\widehat{\Phi}$ działa tak jak opisano w poprzednim zadaniu. Pokaż, że $\widehat{\Phi}$ jest wierny i pełny.
9. Kontrawariantny funktor $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Set}$ nazywamy reprezentowalnym (reprezentowanym przez obiekt A w $\mathcal{C}$) jeśli jest naturalnie izomorficzny funktorowi $\mathfrak{h}^A$. Pokaż, że kowariantny funktor zapominania $\mathcal{A}b \rightarrow \mathcal{Set}$ jest naturalnie izomorficzny funktorowi $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$.
10. Niech $\mathcal{Vect}_k^{<\infty}$ oznacza kategorię przestrzeni wektorowych nad ciałem k wymiaru skończonego. Rozpatrzmy funktor kowariantny podwójnej dualizacji $\cdot^{\vee\vee} : \mathcal{Vect}_k^{<\infty} \rightarrow \mathcal{Vect}_k^{<\infty}$. Znaleźć naturalną transformację funktora identyczności do podwójnej dualizacji i pokazać, że na $\mathcal{Vect}_k^{<\infty}$ jest to równoważność funktorów.
11. Niech $\text{vect}_k^{<\infty}$ oznacza kategorię, której obiektami są przestrzenie liniowe k^n (jeden obiekt dla każdego $n \geq 0$) zaś $\text{Mor}_{\text{vect}}(k^n, k^m)$ to macierze $n \times m$. Pokaż, że naturalne włożenie $\text{vect}_k^{<\infty}$ w $\mathcal{Vect}_k^{<\infty}$ oraz, z drugiej strony, wybór (pewnej) bazy dla każdej przestrzeni w $\mathcal{Vect}_k^{<\infty}$, daje równoważność tych kategorii.
12. Produkt kategoriowy $A, B \in \text{Obj}_{\mathcal{C}}$ to obiekt D z dwoma morfizmami $A \leftarrow D \rightarrow B$ takimi, że dla dowolnego obiektu D' , który ma morfizmy $A \leftarrow D' \rightarrow B$ istnieje dokładnie jeden morfizm z D' do D , który daje następujący przemienny diagram



Produkt D oznaczamy, o ile nie spowoduje to konfuzji, przez $A \times B$. Ko-produkt definiujemy przez odwrócenie strzałek. Pokaż, że tak zdefiniowany produkt jest jeden z dokładnością do izomorfizmu. Pokaż, że produkty są przemienne, to jest $A \times B$ jest izomorficzne z $B \times A$. Opisz produkty i koprodukty w kategoriach $\mathcal{Set}$, $\mathcal{Top}$, $\mathcal{Ab}$, $\mathcal{Gr}$, $\mathcal{Ring}$ (zauważ, że niekoniecznie muszą istnieć).

13. Załóżmy, że w kategorii $\mathcal{C}$ mamy trzy obiekty z następującymi dwoma strzałkami $A \rightarrow C \leftarrow B$. Produktem włóknistym A i B nad C nazywamy obiekt D z morfizmami $A \leftarrow D \rightarrow B$, które dają następujący diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

Ponadto zakładamy, że o ile obiekt D' spełnia powyższy warunek dla D to mamy dokładnie jeden morfizm $D' \rightarrow D$, który można wstawić w następujący diagram przemienny

$$\begin{array}{ccccc} D' & & & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ & D & \longrightarrow & B \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & A & \longrightarrow & C \end{array}$$

(Dashed arrow from D' to D is labeled $\exists!$)

Tak zdefiniowany produkt włóknisty (o ile wiemy, gdzie jest zdefiniowany) zwykle oznaczamy przez $A \times_C B$. Ko-produkt włóknisty definiujemy przez odwrócenie strzałek. Pokaż, że tak zdefiniowany produkt (i ko-produkt) jest jeden z dokładnością do izomorfizmu. Opisz produkty i koprodukty włókniste w kategoriach $\mathcal{Set}$, $\mathcal{Top}$, $\mathcal{Ab}$. Pokaż, że jeśli kategoria $\mathcal{C}$ ma obiekt końcowy Z i istnieje w niej produkt $A \times B$ to produkt włóknisty $A \times_Z B$ jest izomorficzny z $A \times B$.

14. Złożenie produktów włóknistych jest produktem włóknistym. Załóżmy, że następujące obiekty i strzałki są zdefiniwane

$$\begin{array}{ccccc} E \times_A (A \times_C B) & \longrightarrow & A \times_C B & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & A & \longrightarrow & C \end{array}$$

Pokaż, że $E \times_A (A \times_C B)$ jest izomorficzne z $E \times_C B$, gdzie $E \rightarrow C$ to złożenie $E \rightarrow A \rightarrow C$.

15. Zmiana bazy produktu włóknistego. Załóżmy, że istnieje produkt włóknisty dla $A \rightarrow C \leftarrow B$. Pokaż, że dowolny morfizm $C \rightarrow E$ indukuje naturalne odwzorowanie $A \times_C B \rightarrow A \times_E B$ i mamy diagram

$$\begin{array}{ccc} A \times_C B & \longrightarrow & A \times_E B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & C \times_E C \end{array}$$

gdzie odwzorowanie $C \rightarrow C \times_E C$ jest diagonalą czyli odwzorowaniem w produkt włóknisty pochodzącym z dwóch kopii identyczności $C \rightarrow C$. Pokaż, że powyższy diagram też jest produktem włóknistym.