

Algebra 2*, zadania na ćwiczenia, seria I

Powtórzenie o modułach.

Materiał do tej serii zadań powinni Państwo znać z GALu i pierwszej Algebry; dla powtórzenia proszę zajrzeć do książki Reida, *Undergraduate Commutative Algebra*, tu jest skan drugiego rozdziału, skąd wzięłem część zadań i gdzie znajdują Państwo również wskazówki a nawet rozwiązania niektórych z nich.

Notacja: A jest pierścieniem przemiennym z jednością. Jeśli nie jest powiedziane inaczej, to moduły są zdefiniowane nad A i zwykle oznaczane literami M, N, W , natomiast 0 oznacza moduł zerowy. Kojądro homomorfizmu modułów $\alpha : M \rightarrow N$ to z definicji moduł ilorazowy $\text{coker}(\alpha) = N/\text{im}(\alpha)$.

Odwzorowania wieloliniowe modułów definiujemy podobnie jak odwzorowania wieloliniowe przestrzeni liniowych. Na przykład odwzorowanie dwuliniowe $\phi : M \times N \rightarrow W$ spełnia warunki $a \cdot \phi(m, n) = \phi(am, n) = \phi(m, an)$, $\phi(m_1 + m_2, n) = \phi(m_1, n) + \phi(m_2, n)$ i $\phi(m, n_1 + n_2) = \phi(m, n_1) + \phi(m, n_2)$,

Odwzorowanie r -liniowe A modułów

$$\phi : M \times \cdots \times M \rightarrow N$$

nazywamy alternującym (antysymetrycznym) jeśli dla dowolnych $1 \leq i \neq j \leq r$ zachodzi

$$\phi(\cdots m_i \cdots m_j \cdots) = -\phi(\cdots m_j \cdots m_i \cdots)$$

(tam gdzie są kropki nic nie zmieniamy); zakładamy tutaj, że 2 nie jest dzielnikiem zera w pierścieniu A . Odpowiednio, ϕ nazwiemy symetrycznym jeśli dla dowolnych $1 \leq i \neq j \leq r$ mamy

$$\phi(\cdots m_i \cdots m_j \cdots) = \phi(\cdots m_j \cdots m_i \cdots)$$

Ciągi dokładne. Ciąg homomorfizmów modułów

$$\cdots \rightarrow M_i \xrightarrow{\alpha_i} M_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} M_{i+2} \rightarrow \cdots$$

jest dokładny w M_{i+1} jeśli $\text{im}(\alpha_i) = \ker(\alpha_{i+1})$; ciąg jest dokładny jeśli jest dokładny w każdym miejscu.

1. Charakterystyka Eulera. Rozpatrzmy ciąg dokładny przestrzeni wektorowych nad ciałem k :

$$0 \rightarrow V_1 \rightarrow \cdots \rightarrow V_r \rightarrow 0$$

Pokaż, że $\sum_{i=1}^r (-1)^i \cdot \dim_k V_i = 0$.

2. Lemat o pięciu. Rozpatrzmy następujący diagram przemienny

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

w którym górny i dolny wiersz są dokładne. Pokaż, że jeśli cztery pionowe strzałki po bokach są izomorfizmami to i środkowa jest izomorfizmem.

3. Lemat o węź. Rozpatrzmy następujący diagram przemienny

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 \end{array}$$

w którym poziome ciągi są dokładne a pionowe strzałki oznaczamy odpowiednio α_1, α_2 i α_3 . Pokaż, że istnieje homomorfizm $\delta : \ker(\alpha_3) \rightarrow \operatorname{coker}(\alpha_1)$ taki, że indukowany przez ten diagram ciąg homomorfizmów

$$\ker(\alpha_1) \rightarrow \ker(\alpha_2) \rightarrow \ker(\alpha_3) \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(\alpha_1) \rightarrow \operatorname{coker}(\alpha_2) \rightarrow \operatorname{coker}(\alpha_3)$$

jest dokładny.

4. Produkt tensorowy. Pokazać, że dla każdej pary modułów M, N istnieje dokładnie jeden (z dokładnością do izomorfizmu) moduł $M \otimes N$ wraz z odwzorowaniem dwuliniowym $\psi : M \times N \rightarrow M \otimes N$ takim, że dla każdego dwuliniowego odwzorowania $\phi : M \times N \rightarrow W$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\tilde{\phi} : M \otimes N \rightarrow W$ spełniający warunek $\tilde{\phi} \circ \psi = \phi$. Oznaczenie: $m \otimes n$ oznacza $\psi(m, n)$.
5. Produkt zewnętrzny. Pokazać, że istnieje dokładnie jeden (z dokładnością do izomorfizmu) moduł $\bigwedge^r M$ wraz z odwzorowaniem r -liniowym alternującym $\psi : M \times \cdots \times M \rightarrow \bigwedge^r M$ takim, że dla każdego r -liniowego odwzorowania alternującego $\phi : M \times \cdots \times M \rightarrow N$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\tilde{\phi} : \bigwedge^r M \rightarrow N$ spełniający warunek $\tilde{\phi} \circ \psi = \phi$. Oznaczenie: dla $m_1, \dots, m_r \in M$ przez $m_1 \wedge \cdots \wedge m_r$ oznaczamy $\psi(m_1, \dots, m_r)$.
6. Produkt symetryczny. Pokazać, że istnieje dokładnie jeden (z dokładnością do izomorfizmu) moduł $S^r M$ wraz z odwzorowaniem r -liniowym symetrycznym $\psi : M \times \cdots \times M \rightarrow S^r M$ takim, że dla każdego r -liniowego odwzorowania symetrycznego $\phi : M \times \cdots \times M \rightarrow N$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\tilde{\phi} : S^r M \rightarrow N$ spełniający warunek $\tilde{\phi} \circ \psi = \phi$.

7. Wyznacznik. Niech M będzie A modulem wolnym rangi d nad A z bazą $m_1, \dots, m_d$. Pokazać, że istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\det : \bigwedge^d M \rightarrow A$ taki, że $\det(m_1 \wedge \dots \wedge m_d) = 1$. Pokazać, że $\det$ jest izomorfizmem A modułów.
8. Pokazać, że jeśli M jest wolny, skończonej rangi, to i $\bigwedge^r M$ jest wolny, znaleźć jego rangę.
9. Pokazać, że jeśli M jest wolny, rangi d , to moduł $S^r M$ jest izomorficzny z modulem wielomianów jednorodnych stopnia r od d zmiennych o współczynnikach w A .
10. Kompleks Koszula. Niech M będzie skończenie generowanym A -modulem. Weźmy homomorfizm $h : M \rightarrow A$, którego obrazem jest ideał $I = h(M) \triangleleft A$. Definiujemy $d_r : \bigwedge^r M \rightarrow \bigwedge^{r-1} M$ (przyjmujemy $\bigwedge^0 M = A$) kładąc

$$d_r(m_1 \wedge \dots \wedge m_r) = \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} h(m_i) \cdot m_1 \wedge \dots \wedge m_{i-1} \wedge m_{i+1} \wedge \dots \wedge m_r$$

- (a) Pokazać, że $d_i \circ d_{i+1} = 0$ więc $\text{im}(d_i) \subset \ker(d_{i-1})$.
 - (b) Pokazać, że jeśli A jest ciałem (i h jest niezerowe) to $\text{im}(d_i) = \ker(d_{i-1})$, dla $i > 1$.
 - (c) Zbadać warunek $\text{im}(d_i) = \ker(d_{i-1})$ dla $A = k[x, y]$, $M = A \oplus A$ i $h(f_1, f_2) = xf_1 + yf_2$.
 - (d) * To samo dla $A = k[x, y, z]$, $M = A \oplus A \oplus A$ i $h(f_1, f_2, f_3) = xf_1 + yf_2 + zf_3$.
 - (e) Podaj przykład, że nie zawsze $\text{im}(d_i) = \ker(d_{i-1})$.
11. Twierdzenie Cayleya-Hamiltona [Reid, 2.6]. Niech I_n oznacza macierz jednostkową $n \times n$. Dla macierzy Φ wymiaru $n \times n$ o współczynnikach z A definiujemy jej wielomian charakterystyczny $P_\Phi(t) = \det(t \cdot I_n - \Phi) \in A[t]$ (gdzie $\det$ tym razem oznacza zwykły wyznacznik). Pokaż, że $P_\Phi(\Phi) = 0$ jako macierz $n \times n$. Równoważnie, niech $\phi : A^n \rightarrow A^n$ będzie endomorfizmem wolnego A -modułu rangi n zdefiniowanym przez Φ , to znaczy jeśli m_i są wektorami bazowymi A^n to $\phi(m_i) = \sum_j a_{ij} m_j$. Pokaż, że $P_\Phi(\phi) = 0$ w pierścieniu $A[\phi] \subset \text{End}(A^n)$. Wskazówka: rozpatrz macierz $\Delta = (\phi \cdot I_n - \Phi)$ o współczynnikach w $A[\phi]$ i skorzystaj z tego, że Δ ma macierz dołączoną $\text{adj}(\Delta)$ w $A[\phi]$ by pokazać, że $\det(\Delta) = 0$ w $A[\phi]$.

12. Trik wyznacznikowy [Reid, 2.7]. Niech M będzie modulem generowanym przez n elementów a $\phi : M \rightarrow M$ jego endomorfizmem. Załóżmy, że I jest ideałem w A takim, że $\phi(M) \subseteq IM$. Pokaż, że ϕ spełnia następującą relację w $A[\phi]$:

$$\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\phi + a_n = 0$$

gdzie $a_s \in I^s$. (Skorzystaj ze wskazówki do poprzedniego zadania.)

13. Lemat Nakayamy. Skorzystaj z poprzedniego zadania by pokazać następujący fakt: Jeśli M jest skończenie generowanym A modulem a I ideałem w A takim, że $M = IM$ to istnieje $a \in A$ takie, że $a - 1 \in I$ oraz $aM = 0$.