Turnieje Howella

Przypuśćmy, że osiem par brydżowych chce rozegrać turniej. Chcą przy tym, by każda para zagrała przeciwko każdej innej parze. Jednym ze sposobów rozegrania takiego turnieju jest wykorzystanie tzw. kart pilotujących Howella (od nazwiska matematyka, który pierwszy zaproponował użycie takich kart). Oto przykład karty pilotującej do turnieju Howella dla ośmiu par.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{1WE} \arrow[r] & \mathrm{3WE} \arrow[r] & \mathrm{2WE} \arrow[r] & \mathrm{3NS} \arrow[d] \\
& 1 \leftarrow \mathrm{Z} \leftarrow \mathrm{Z} \leftarrow 2 \leftarrow \mathrm{Z} \leftarrow 3 \leftarrow 4 & & \\
\mathrm{2NS} \arrow[uu] & \mathrm{4NS} \arrow[l] & & \mathrm{4WE} \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Turniej jest rozgrywany na czterech stołach, o numerach od 1 do 4. Na każdym stole grają dwie pary: jedna na linii NS, druga na linii WE. Siedem par (o numerach od 1 do 7) otrzymuje takie karty, każda z zaznaczoną inną pozycją startową:

1	1 WE
2	2 NS
3	4 NS
4	4 WE
5	3 NS
6	2 WE
7	3 WE

Para numer 8 nie otrzymuje karty pilotującej; zajmuje ona miejsce na linii NS na stole 1 i nie zmienia swojej pozycji przez cały czas trwania turnieju. Pozostałe pary przechodzą w kolejnych rundach na następne miejsce na swojej karcie pilotującej. I tak na przykład w drugiej rundzie pary o numerach od 1 do 7 przejdą na następujące pozycje:

1	1 WE	→	3 WE
2	2 NS	→	1 WE
3	4 NS	→	2 NS
4	4 WE	→	4 NS
5	3 NS	→	4 WE
6	2 WE	→	3 NS
7	3 WE	→	2 WE

W następnych rundach pary poruszają się według tego samego schematu. W tym samym czasie pudełka z kartami również zmieniają swoje położenia. Oprócz czterech stolików, na których są rozgrywane kolejne rozdania, sędzia ustawia trzy dodatkowe stoliki, zwane zbiornicami. Na tych stolikach znajdują się pudełka z rozdaniami, które w danej rundzie nie są rozgrywane. Dwie zbiornice znajdują się między stolikami o numerach 1 i 2, trzecia między stolikami o numerach 2 i 3. Karty w kolejnych rundach są przenoszone w kierunku malejących numerów stolików, uwzględniając zbiornice (oraz ze stolika 1 na stolik 4). Na początku karty zajmują następujące pozycje:

rozdanie 1	stolik 1
rozdanie 2	zbiornica
rozdanie 3	zbiornica
rozdanie 4	stolik 2
rozdanie 5	zbiornica
rozdanie 6	stolik 3
rozdanie 7	stolik 4

W następnej rundzie zajmą pozycje:

rozdanie 1	stolik 4
rozdanie 2	stolik 1
rozdanie 3	zbiornica
rozdanie 4	zbiornica
rozdanie 5	stolik 2
rozdanie 6	zbiornica
rozdanie 7	stolik 3

W następnych rundach rozdania będą przemieszczać się według tego samego schematu. A oto przebieg całego turnieju. W kolejnych wierszach tabeli mamy podane pozycje par i kart w kolejnych rundach. Wewnątrz kwadratu znajduje się numer rozdania rozgrywanego w danej rundzie na danym stole. Liczby nad i pod kwadratem oznaczają numer pary grającej na linii NS, z lewej i prawej strony – numer pary grającej na linii WE.

I tak oznaczenie

$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ 7 & \boxed{1} & 7 \\ & 2 & \end{array}$$

wskazuje, że na danym stoliku para 2 gra na linii NS przeciwko parze 7 grającej na linii WE; rozgrywane jest rozdanie numer 1.

Przebieg turnieju.

Stół 1	Stół 4	Stół 3	Z	Stół 2	Z	Z
8 1 $\boxed{1}$ 1 8	3 4 $\boxed{7}$ 4 3	5 7 $\boxed{6}$ 7 5	$\boxed{5}$	2 6 $\boxed{4}$ 6 2	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$
8 2 $\boxed{2}$ 2 8	4 5 $\boxed{1}$ 5 4	6 1 $\boxed{7}$ 1 6	$\boxed{6}$	3 7 $\boxed{5}$ 7 3	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$
8 3 $\boxed{3}$ 3 8	5 6 $\boxed{2}$ 6 5	7 2 $\boxed{1}$ 2 7	$\boxed{7}$	4 1 $\boxed{6}$ 1 4	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$
8 4 $\boxed{4}$ 4 8	6 7 $\boxed{3}$ 7 6	1 3 $\boxed{2}$ 3 1	$\boxed{1}$	5 2 $\boxed{7}$ 2 5	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$
8 5 $\boxed{5}$ 5 8	7 1 $\boxed{4}$ 1 7	2 4 $\boxed{3}$ 4 2	$\boxed{2}$	6 3 $\boxed{1}$ 3 6	$\boxed{7}$	$\boxed{6}$
8 6 $\boxed{6}$ 6 8	1 2 $\boxed{5}$ 2 1	3 5 $\boxed{4}$ 5 3	$\boxed{3}$	7 4 $\boxed{2}$ 4 7	$\boxed{1}$	$\boxed{7}$
8 7 $\boxed{7}$ 7 8	2 3 $\boxed{6}$ 3 2	4 6 $\boxed{5}$ 6 4	$\boxed{4}$	1 5 $\boxed{3}$ 5 1	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$

Można zauważyć, że karta pilotująca jest skonstruowana w taki sposób, by każda para zagrała przeciwko każdej innej parze dokładnie jeden raz i by każda para zagrała każde rozdanie dokładnie jeden raz. Karta pilotująca ma jeszcze jedną własność, której teraz się przyjrzymy. Popatrzmy najpierw na dzieje rozdania numer 6.

Runda	Stół	para NS	para WE
1	3	5	7
2	Z	–	–
3	2	4	1
4	Z	–	–
5	Z	–	–
6	1	8	6
7	4	2	3

Protokół turniejowy tego rozdania może wyglądać następująco:

Nr	NS	WE	Kontrakt	Rozgr.	Lew	NS	WE	NS	WE
3	5	7	3♠	N	9	140		3	3
2	4	1	4♠	S	10	420		6	0
1	8	6	3♠	S	9	140		3	3
4	2	3	4♠	N	9		50	0	6

W pierwszej kolumnie zapisany jest numer stołu, na którym to rozdanie było rozgrywane. W dwóch następnych kolumnach zapisane są numery par grających to rozdanie. W następnych trzech kolumnach zapisany jest wylicytowany kontrakt, oznaczenie rozgrywającego oraz liczba lew. W kolejnych dwóch kolumnach zapisana jest wartość osiągniętego kontraktu. Te wszystkie kolumny wypełniają grzcze po rozegraniu rozdania.

Ostatnie dwie kolumny są przeznaczone na wynik i wypełnia je sędzia turnieju. W kolumnie NS wpisywany jest wynik dla pary grającej na linii NS. Za każdy wynik (innej pary) gorszy od uzyskanego przez daną parę ta para otrzymuje 2 punkty; za jednakowy otrzymuje 1 punkt. I tak para numer 4 otrzymuje 6 punktów: po 2 punkty za wyniki gorsze (140, 140, -50). Para numer 5 otrzymuje 3 punkty: 2 punkty za wynik gorszy (-50) i 1 punkt za wynik jednakowy (140). Tyle samo punktów uzyskuje para numer 8. Wreszcie para numer 2 uzyskuje 0 punktów, bo wszystkie pary uzyskały wyniki lepsze od niej.

Podobnie przyznaje się punkty parom grającym na linii WE. Można zauważyć, że suma punktów przyznanych parom grającym na tym samym stole jest zawsze równa 6. Punkty uzyskane w ten sposób we wszystkich rozdaniach dodaje się i otrzymane sumy decydują o miejscu w turniaju. Ten sposób punktacji nie jest najlepszy w przypadku tak małego turnieju, ale jest najprostszy i najlepiej pokazuje istotę turnieju brydżowego. Pary grające dane rozdanie na linii NS są porównywane między sobą; podobnie pary grające na linii WE.

Ostatnia wspomniana wcześniej własność karty pilotującej polega na tym, że każde dwie pary są ze sobą porównywane w tej samej liczbie rozdań. Na przykład, pary 7 i 5 są porównywane ze sobą trzy razy:

1. w rozdaniu 2 obie grają na linii NS (para 7 w rundzie 6, para 5 w rundzie 3);
2. w rozdaniu 3 obie grają na linii WE (para 7 w rundzie 4; para 5 w rundzie 7);
3. w rozdaniu 7 obie grają na linii NS (para 7 w rundzie 7; para 5 w rundzie 4).

Podobnie pary 2 i 6 są porównywane ze sobą trzy razy:

1. w rozdaniu 3 obie grają na linii NS (para 2 w rundzie 5, para 6 w rundzie 4);
2. w rozdaniu 5 obie grają na linii WE (para 2 w rundzie 6; para 6 w rundzie 7);
3. w rozdaniu 6 obie grają na linii NS (para 2 w rundzie 7; para 6 w rundzie 6).

Mówimy, że turniej jest całkowicie zrównoważony, gdy każde dwie pary są porównywane ze sobą tę samą liczbę razy.

Przypuśćmy teraz, że n par brydżowych chce rozegrać podobny turniej. Czy istnieje karta pilotująca Howella dla n par? Chcemy, by zachowane były następujące warunki:

(1) w turnieju rozgrywa się $n-1$ rund;

(2) w każdej rundzie na każdym z $\frac{n}{2}$ stołów jest rozgrywane jedno rozdanie, grają je dwie pary: jedna na linii NS, druga na linii WE;

(3) każda para gra przeciwko każdej innej parze dokładnie jeden raz;

(4) każda para gra każde rozdanie dokładnie jeden raz;

(5) każde dwie pary grają tę samą liczbę rozdań na tej samej linii.

Z warunku (2) wynika, że liczba par jest parzysta: $n = 2m$, gdzie m jest liczbą stołów, na których są rozgrywane rozdania. W każdym rozdaniu m par gra na linii NS i m par gra na linii WE. Zatem $\binom{m}{2}$ par jest porównywanych ze sobą na każdej z tych linii; łącznie zatem w jednym rozdaniu mamy $2 \cdot \binom{m}{2} = m(m-1)$ porównań. Ponieważ w turnieju mamy $2m-1$ rozdań, więc łączna liczba porównań par w całym turnieju wynosi $m(m-1)(2m-1)$.

Niech teraz k będzie liczbą porównań każdych dwóch par: z warunku (5) wynika, że dla każdych dwóch par ta liczba jest taka sama. Mamy zatem $\binom{2m}{2} = m(2m-1)$ par, czyli łączna liczba porównań wynosi $km(2m-1)$. Stąd wynika, że

$$m(m-1)(2m-1) = km(2m-1),$$

czyli

$$k = m - 1.$$

To znaczy, że dowolne dwie pary rozgrywają ze sobą $m-1$ rozdań na tej samej linii i m rozdań na przeciwnych liniach.

Udowodnimy teraz, że liczba n jest podzielna przez 4.

Każde z $2m-1$ rozdań dzieli zbiór X wszystkich par na dwa podzbiory rozłączne. Dla rozdania o numerze i mamy

$$A_i^0 = \text{zbiór par grających rozdanie } i \text{ na linii NS;}$$
$$A_i^1 = \text{zbiór par grających rozdanie } i \text{ na linii WE.}$$

Mamy zatem
$$A_i^0 \cap A_i^1 = \varnothing, \quad A_i^0 \cup A_i^1 = X, \quad |A_i^0| = |A_i^1| = m.$$
Każda para p należy do dokładnie $2m-1$ zbiorów A_i^ε $(i = 1, 2, \ldots, 2m-1, \varepsilon = 0, 1)$:

$$\left|\Big\{(i,\varepsilon): \; p \in A_i^\varepsilon\Big\}\right| = 2m-1.$$

Warunek (5) można wysłowić w sposób następujący: dla dowolnych dwóch par p i q mamy
$$\left|\Big\{(i,\varepsilon): \; p \in A_i^\varepsilon \;\wedge\; q \in A_i^\varepsilon\Big\}\right| = m-1.$$

Niech p, q i r będą trzema dowolnymi parami. Definiujemy teraz cztery zbiory:

$$B = \Big\{(i,\varepsilon): p \in A_i^\varepsilon \;\wedge\; q \in A_i^\varepsilon \;\wedge\; r \in A_i^\varepsilon\Big\}$$

$$C = \Big\{(i,\varepsilon): p \in A_i^\varepsilon \;\wedge\; q \notin A_i^\varepsilon \;\wedge\; r \in A_i^\varepsilon\Big\}$$

$$D = \Big\{(i,\varepsilon): p \notin A_i^\varepsilon \;\wedge\; q \in A_i^\varepsilon \;\wedge\; r \in A_i^\varepsilon\Big\}$$

$$E = \Big\{(i,\varepsilon): p \notin A_i^\varepsilon \;\wedge\; q \notin A_i^\varepsilon \;\wedge\; r \in A_i^\varepsilon\Big\}$$

Oczywiście zbiory B, C, D i E są parami rozłączne. Niech

$$|B| = b, \quad |C| = c, \quad |D| = d, \quad |E| = e.$$

Zauważmy następnie, że

$$B \cup C = \Big\{(i,\varepsilon): \; p \in A_i^\varepsilon \;\wedge\; r \in A_i^\varepsilon\Big\}$$

oraz
$$B \cup D = \Big\{(i,\varepsilon): \; q \in A_i^\varepsilon \;\wedge\; r \in A_i^\varepsilon\Big\}.$$

Stąd wynika, że
$$b + c = b + d = m-1,$$

czyli
$$c = d = m-1-b.$$

Następnie
$$B \cup C \cup D \cup E = \Big\{ (i, \varepsilon) : \; r \in A_i^{\varepsilon} \Big\}.$$
Zatem
$$b + (m-1-b) + (m-1-b) + e = 2m-1,$$
czyli
$$e = b + 1.$$
Stąd wynika, że
$$|B \cup E| = 2b + 1.$$

Definiujemy jeszcze jeden zbiór:
$$E' = \Big\{ (i, \varepsilon) : p \in A_i^{\varepsilon} \; \wedge \; q \in A_i^{\varepsilon} \; \wedge \; r \notin A_i^{\varepsilon} \Big\}.$$
Można łatwo zauważyć, że
$$(i, \varepsilon) \in E \;\; \Leftrightarrow \;\; (i, 1-\varepsilon) \in E'.$$
Stąd wynika, że $|E| = |E'|$. Ponieważ zbiory E i E' są rozłączne ze zbiorem B, więc
$$|B \cup E| = |B \cup E'|.$$
Ale
$$B \cup E' = \Big\{ (i, \varepsilon) : \; p \in A_i^{\varepsilon} \; \wedge \; q \in A_i^{\varepsilon} \Big\},$$
skąd wynika, że
$$|B \cup E'| = m - 1.$$
Zatem
$$2b + 1 = m - 1,$$
czyli
$$m = 2b + 2,$$
a więc liczba m jest parzysta. To znaczy, że liczba n jest podzielna przez 4.

Udowodnimy teraz, że jeśli liczba n jest podzielna przez 4 oraz liczba $p = n - 1$ jest pierwsza, to można zorganizować turniej spełniający warunki (1) – (5). Okaże się też, że sposób zmiany miejsc przez pary i zmiany rozdań da się opisać za pomocą karty pilotującej.

Załóżmy więc, że $p > 3$ jest liczbą pierwszą oraz $p \equiv 3 \pmod 4$. Wykażemy, że istnieje karta pilotująca Howella dla $n = p + 1$ par.

Niech a będzie dowolną liczbą niepodzielną przez p. Przypominamy, że liczbę a nazywamy resztą kwadratową modulo p, jeśli istnieje liczba całkowita x taka, że

$$x^2 \equiv a \pmod{p}.$$

Jeśli taka liczba x nie istnieje, to liczbę a nazywamy nieresztą kwadratową modulo p. W dalszym ciągu będziemy używać symbolu Legendre'a:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} +1 & \text{jeśli } a \text{ jest resztą kwadratową modulo } p; \\ -1 & \text{jeśli } a \text{ jest nieresztą kwdratową modulo } p. \end{cases}$$

Zauważmy najpierw, że z twierdzenia Eulera wynika, że $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$, a więc -1 jest nieresztą kwadratową modulo p. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby a takiej, że $0 < a < p$ mamy:

$$\left(\frac{-a}{p}\right) = -\left(\frac{a}{p}\right),$$

czyli

$$a \text{ jest resztą kwadratową modulo } p \quad \Leftrightarrow \quad -a \text{ jest nieresztą kwadratową modulo } p.$$

Definiujemy $\alpha = \frac{p+5}{4}$. Oczywiście α jest liczbą całkowitą. Proste obliczenia pokazują, że

$$\alpha \not\equiv 1 \pmod{p} \quad \text{oraz} \quad \alpha \not\equiv -1 \pmod{p}.$$

Zatem $\alpha - 1 \neq 0$ oraz $\alpha + 1 \neq 0$ w ciele $\mathbb{Z}_p$.

Zauważmy następnie, że

$$4(\alpha - 1) = p + 1 \quad \text{oraz} \quad 4(\alpha + 1) = p + 9.$$

Stąd wynika, że

$$4(\alpha-1) \equiv 1 \pmod{p},$$
$$\left(\frac{4(\alpha-1)}{p}\right) = 1,$$
$$\left(\frac{4}{p}\right) \cdot \left(\frac{\alpha-1}{p}\right) = 1,$$
$$\left(\frac{\alpha-1}{p}\right) = 1.$$

Podobnie

$$\begin{gathered}4(\alpha+1) \equiv 9 \pmod p,\\ \left(\frac{4(\alpha+1)}{p}\right) = \left(\frac{9}{p}\right) = 1,\\ \left(\frac{4}{p}\right)\cdot\left(\frac{\alpha+1}{p}\right) = 1,\\ \left(\frac{\alpha+1}{p}\right) = 1.\end{gathered}$$

Zatem $\alpha - 1$ i $\alpha + 1$ są resztami kwadratowymi modulo p. Stąd też $\alpha^2 - 1$ jest resztą kwadratową modulo p.

Definiujemy teraz zbiory:

$$\begin{aligned}X &= \{0, 1, \ldots, p-1, p\} \quad \text{zbiór numerów par,}\\ Y &= \{0, 1, \ldots, p-1\} \quad \text{zbiór numerów rozdań,}\\ R &= \{0, 1, \ldots, p-1\} \quad \text{zbiór numerów rund,}\\ S &= \{0, 1, \ldots, p-1\} \quad \text{zbiór numerów stołów,}\\ L &= \{-1, +1\} \quad \text{zbiór oznaczeń linii } (+1 \text{ oznacza linię NS, } -1 \text{ oznacza linię WE}).\end{aligned}$$

Mamy zatem $n = p + 1$ par numerowanych liczbami od 0 do p oraz p rozdań numerowanych liczbami od 0 do $p - 1$. Wszystkie rozdania są rozgrywane w rundach, w każdej rundzie grają wszystkie pary. Mamy p rund, numerowanych liczbami od 0 do $p - 1$. Mamy następnie p stołów, numerowanych liczbami od 0 do $p - 1$. W każdej rundzie pary grają przy $\frac{p+1}{2}$ stołach, pozostałe stoły są wolne. Na tych stołach jednak znajdują się karty; są to zbiornice. Okaże się, że numery zbiornic są stałe: nie zależą od rundy.

Definiujemy teraz trzy funkcje:

$$\begin{gathered}T : Y \times R \to S,\\ t : X \times R \to S,\\ s : X \times R \to L.\end{gathered}$$

Jeśli $x \in X$, $y \in Y$ oraz $r \in R$, to:

$$\begin{aligned}T(y, r) &= \text{numer stołu, na którym rozdanie } y \text{ jest grane w rundzie } r,\\ t(x, r) &= \text{numer stołu, na którym para } x \text{ gra w rundzie } r,\\ s(x, r) &= \text{oznaczenie linii, na której para } x \text{ gra w rundzie } r.\end{aligned}$$

A oto definicje tych funkcji:

$$T(y,r) = r - y.$$

$$t(x,r) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x = p \text{ lub } x = r; \\ \dfrac{x-r}{\alpha - 1} & \text{jeśli } x - r \text{ jest resztą kwadratową modulo } p; \\ \dfrac{r-x}{\alpha + 1} & \text{jeśli } r - x \text{ jest resztą kwadratową modulo } p. \end{cases}$$

$$s(x,r) = \begin{cases} +1 & \text{jeśli } x = p; \\ -1 & \text{jeśli } x = r; \\ +1 & \text{jeśli } x - r \text{ jest resztą kwadratową modulo } p; \\ -1 & \text{jeśli } r - x \text{ jest resztą kwadratową modulo } p. \end{cases}$$

Wszystkie działania w tej definicji są wykonywane w ciele $\mathbb{Z}_p$.

Zauważmy, że albo $t(x,r) = 0$, albo $t(x,r)$ jest resztą kwadratową modulo p. Rozdania rozgrywane są zatem na stole o numerze 0 i na stołach, których numery są resztami kwadratowymi modulo p. Zauważmy, że istnieje dokładnie $\frac{n}{2}$ stołów, przy których rozgrywane są kolejne rozdania; są to stoły o tych samych numerach w każdej rundzie. Numery stołów, na których nie rozgrywa się rozdań (czyli zbiornic), są nieresztami kwadratowymi modulo p.

Przypuśćmy teraz, że dany jest numer stołu t_0 i numer rundy r_0. W tej rundzie na stole t_0 znajduje się rozdanie $y_0 = r_0 - t_0$. Mianowicie

$$T(y_0, r_0) = r_0 - y_0 = r_0 - (r_0 - t_0) = t_0.$$

Ponieważ liczba rozdań jest równa liczbie stołów, więc w każdej rundzie na każdym stole znajduje się dokładnie jedno rozdanie.

Wykażemy teraz, że w każdej rundzie na każdym stole, którego numer nie jest nieresztą kwadratową modulo p, spotkają się dokładnie dwie pary. Niech więc dany będzie numer stołu t_0 i numer rundy r_0.

Przypuśćmy najpierw, że $t_0 = 0$. Z definicji funkcji t wynika, że na stole o numerze 0 w rundzie r_0 mogą grać tylko dwie pary o numerach p i r_0. Z definicji funkcji s wynika, że para o numerze p gra na linii NS, a para o numerze r_0 gra na linii WE.

Niech teraz $t_0 \neq 0$. Zatem t_0 jest resztą kwadratową modulo p. Przypuśćmy, że para o numerze x gra w rundzie r_0 na stole o numerze t_0. Oczywiście wtedy $x \neq p$ oraz $x \neq r_0$. Możliwe są teraz dwa przypadki:

(1) $x - r_0$ jest resztą kwadratową modulo p. Wtedy

$$t_0 = \frac{x - r_0}{\alpha - 1},$$

czyli

$$x = r_0 + t_0(\alpha - 1).$$

Ponadto $s(x, r_0) = +1$.

(2) $r_0 - x$ jest resztą kwadratową modulo p. Wtedy

$$t_0 = \frac{r_0 - x}{\alpha + 1},$$

czyli

$$x = r_0 - t_0(\alpha + 1).$$

Ponadto $s(x, r_0) = -1$.

Proste obliczenia pokazują, że te dwie pary rzeczywiście grają w rundzie r_0 na stole o numerze t_0.

Tak więc w rundzie r_0 na stole o numerze t_0 grają dwie pary:

$$x_0 = r_0 + t_0(\alpha - 1) \quad \text{na linii NS}$$

oraz

$$x_1 = r_0 - t_0(\alpha + 1) \quad \text{na linii WE.}$$

Wykażemy teraz, że każda para gra przeciwko każdej innej parze. Ponieważ w każdej rundzie każda para gra przeciwko dokładnie jednej parze i liczba rund jest równa liczbie par, więc wyniknie stąd, że każde dwie pary grają przeciwko sobie dokładnie jeden raz.

Niech zatem będą dane dwie pary o numerach x_0 i x_1. Definiujemy liczbę r wzorami:

$$r = \begin{cases} x_0 & \text{jeśli } x_1 = p; \\ x_1 & \text{jeśli } x_0 = p; \\ \dfrac{x_1 + x_0}{2} + \dfrac{x_1 - x_0}{2\alpha} & \text{jeśli } \dfrac{x_1 - x_0}{2\alpha} \text{ jest resztą kwadratową modulo } p; \\ \dfrac{x_1 + x_0}{2} + \dfrac{x_0 - x_1}{2\alpha} & \text{jeśli } \dfrac{x_0 - x_1}{2\alpha} \text{ jest resztą kwadratową modulo } p. \end{cases}$$

Pozostawimy jako proste ćwiczenie wykazanie, że w rundzie r pary x_0 i x_1 grają na tym samym stole, jedna na linii NS, druga na linii WE.

Następnie wykazujemy, że każda para gra każde rozdanie. Ponieważ liczba rund jest równa liczbie rozdań, więc z tego wyniknie, że każda para gra każde rozdanie dokładnie jeden raz.

Niech zatem dana będzie para o numerze x_0 i rozdanie o numerze y_0. Definiujemy liczbę r wzorami:

$$r = \begin{cases} y_0 & \text{jeśli } x_0 = p \text{ lub } x_0 = y_0; \\ y_0 + \dfrac{y_0 - x_0}{\alpha} & \text{jeśli } \dfrac{y_0 - x_0}{\alpha} \text{ jest resztą kwadratową modulo } p; \\ y_0 + \dfrac{x_0 - y_0}{\alpha} & \text{jeśli } \dfrac{x_0 - y_0}{\alpha} \text{ jest resztą kwadratową modulo } p. \end{cases}$$

Proste ćwiczenie pokazuje, że w rundzie r para o numerze x_0 i rozdanie o numerze y_0 znajdują się na tym samym stole, a więc para x_0 gra rozdanie y_0.

Wreszcie wykażemy, że każde dwie pary grają tę samą liczbę rozdań na tej samej linii. Wprowadzamy w tym celu nową funkcję

$$S : X \times Y \to L,$$

zdefiniowaną w następujący sposób:

$$S(x, y) = \text{linia, na której para } x \text{ gra rozdanie } y.$$

Niech będzie dana para o numerze x i rozdanie o numerze y. Wiemy już, że para x gra rozdanie y w rundzie r, gdzie

$$r = \begin{cases} y_0 & \text{jeśli } x_0 = p \text{ lub } x_0 = y_0; \\ y_0 + \dfrac{y_0 - x_0}{\alpha} & \text{jeśli } \dfrac{y_0 - x_0}{\alpha} \text{ jest resztą kwadratową modulo } p; \\ y_0 + \dfrac{x_0 - y_0}{\alpha} & \text{jeśli } \dfrac{x_0 - y_0}{\alpha} \text{ jest resztą kwadratową modulo } p. \end{cases}$$

Wtedy

$$S(x, y) = s(x, r),$$

skąd łatwo dostajemy wzór

$$S(x, y) = \begin{cases} +1 & \text{jeśli } x = p; \\ -1 & \text{jeśli } x = y; \\ +1 & \text{jeśli } \dfrac{x - y}{\alpha} \text{ jest resztą kwadratową modulo } p; \\ -1 & \text{jeśli } \dfrac{x - y}{\alpha} \text{ jest nieresztą kwadratową modulo } p. \end{cases}$$

Inaczej mówiąc:

$$S(x, y) = \begin{cases} +1 & \text{jeśli } x = p; \\ -1 & \text{jeśli } x = y; \\ \left(\dfrac{(x - y)\alpha^{-1}}{p}\right) & \text{jeśli } x \neq p \text{ oraz } x \neq y. \end{cases}$$

Przyjmijmy teraz, że $\left(\frac{0}{p}\right) = 0$. Mamy wówczas następującą własność symbolu Legendre'a:

$$\sum_{y=0}^{p-1} \left(\frac{y}{p}\right) = 0.$$

Wynika ona stąd, że $\left(\frac{0}{p}\right) = 0$ oraz w zbiorze $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ jest tyle samo reszt kwadratowych modulo p co niereszt kwadratowych modulo p. Stąd otrzymujemy wniosek:

$$\sum_{y=0}^{p-1} \left(\frac{x-y}{p}\right) = 0.$$

Ta równość wynika natychmiast z poprzedniej, gdyż jeśli y przebiega wszystkie liczby od 0 do $p-1$, to $x-y$ przebiega (w ciele $\mathbb{Z}_p$) ten sam zbiór liczb. Zatem

$$\sum_{y=0}^{p-1} \left(\frac{x-y}{p}\right) = \sum_{y=0}^{p-1} \left(\frac{y}{p}\right) = 0.$$

Wreszcie udowodnimy ważny lemat.

Lemat. Jeśli $a \neq 0$, to

$$\sum_{y=0}^{p-1} \left(\frac{y}{p}\right) \cdot \left(\frac{y+a}{p}\right) = -1.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że

$$\sum_{y=0}^{p-1} \left(\frac{y}{p}\right) \cdot \left(\frac{y+a}{p}\right) = \sum_{y=1}^{p-1} \left(\frac{y(y+a)}{p}\right) = \sum_{y=1}^{p-1} \left(\frac{y^2(1+ay^{-1})}{p}\right) = \sum_{y=1}^{p-1} \left(\frac{1+ay^{-1}}{p}\right).$$

Zauważmy następnie, że jeśli y przebiega liczby od 1 do $p-1$, to $1+ay^{-1}$ przebiega (w ciele $\mathbb{Z}_p$) wszystkie liczby różne od 1. Zatem

$$\sum_{y=1}^{p-1} \left(\frac{1+ay^{-1}}{p}\right) = \sum_{y=0}^{p-1} \left(\frac{y}{p}\right) - \left(\frac{1}{p}\right) = -1,$$

co kończy dowód lematu.

Warunek, że dowolne dwie pary grają tę samą liczbę rozdań na tej samej linii, jest równoważny równości

$$\sum_{y=0}^{p-1} S(x_1, y) \cdot S(x_2, y) = -1$$

dla dowolnych x_1 i x_2 takich, że $x_1 \neq x_2$. Udowodnimy teraz tę równość. Możliwe są dwa przypadki.

Jeśli jedna z liczb x_1 lub x_2 jest równa p, to nasza równość przybiera postać

$$\sum_{y=0}^{p-1} S(x,y) \cdot S(p,y) = -1$$

dla $x \neq p$. Ale $S(p,y) = +1$. Mamy więc dowieść, że

$$\sum_{y=0}^{p-1} S(x,y) = -1.$$

Ale

$$\begin{aligned}\sum_{y=0}^{p-1} S(x,y) = \sum_{y \neq x} S(x,y) + S(x,x) = \sum_{y=0}^{p-1} \left(\frac{(x-y)\alpha^{-1}}{p}\right) - 1 = \\ = \left(\frac{\alpha^{-1}}{p}\right) \cdot \sum_{y \neq x} \left(\frac{x-y}{p}\right) - 1 = \left(\frac{\alpha^{-1}}{p}\right) \cdot \sum_{y=0}^{p-1} \left(\frac{x-y}{p}\right) - 1 = \\ = -1.\end{aligned}$$

Jeśli zaś obie liczby x_1 i x_2 są różne od p, to

$$\begin{aligned}&\sum_{y=0}^{p-1} S(x_1,y) \cdot S(x_2,y) = \\ &\quad = \sum_{y \neq x_1, x_2} S(x_1,y) \cdot S(x_2,y) + S(x_1,x_1) \cdot S(x_2,x_1) + S(x_1,x_2) \cdot S(x_2,x_2) = \\ &\quad = \sum_{y \neq x_1, x_2} S(x_1,y) \cdot S(x_2,y) - S(x_2,x_1) - S(x_1,x_2) = \\ &\quad = \sum_{y \neq x_1, x_2} S(x_1,y) \cdot S(x_2,y),\end{aligned}$$

gdyż $S(x_1,x_2) = -S(x_2,x_1)$. Jeśli $x \neq y$, to

$$S(x,y) = \left(\frac{(x-y)\alpha^{-1}}{p}\right).$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\sum_{y=0}^{p-1} S(x_1,y)\cdot S(x_2,y) &= \sum_{y\neq x_1,x_2} \left(\frac{(x_1-y)\alpha^{-1}}{p}\right)\cdot\left(\frac{(x_2-y)\alpha^{-1}}{p}\right)\\
&= \left(\frac{\alpha^{-2}}{p}\right)\cdot\sum_{y=0}^{p-1}\left(\frac{x_1-y}{p}\right)\cdot\left(\frac{x_2-y}{p}\right)\\
&= \sum_{y=0}^{p-1}\left(\frac{x_1-y}{p}\right)\cdot\left(\frac{x_2-y}{p}\right)\\
&= \sum_{y=0}^{p-1}\left(\frac{y}{p}\right)\cdot\left(\frac{y+(x_2-x_1)}{p}\right)\\
&= -1.
\end{aligned}$$

W ten sposób dowiedliśmy, że każde dwie pary grają tę samą liczbę rozdań na tej samej linii. Pozostaje tylko pokazać konstrukcję karty pilotującej.

Zauważamy najpierw, że każde rozdanie w następnej rundzie przechodzi na stolik o numer o 1 większy (ze stolika $p-1$ na stolik o numerze 0). Można łatwo pokazać, że pary poruszają się według następującego schematu:

$$(0,+1)\to(0,+1),$$

czyli para grająca na stoliku o numerze 0 na linii NS pozostaje w tym samym miejscu;

$$(0,-1)\to\Big((\alpha+1)^{-1},-1\Big),$$

czyli para grająca na stoliku o numerze 0 na linii WE, przenosi się na stolik o numerze $(\alpha+1)^{-1}$ na linię WE. Wreszcie dla $t\neq 0$ mamy

$$(t,+1)\to\begin{cases}\left(\dfrac{1-t(\alpha-1)}{\alpha+1},-1\right) & \text{jeśli } 1-t(\alpha-1)=0 \text{ lub } \left(\dfrac{1-t(\alpha-1)}{p}\right)=1\\[2ex] \Big(t-(\alpha-1)^{-1},+1\Big) & \text{jeśli } \left(\dfrac{1-t(\alpha-1)}{p}\right)=-1\end{cases}$$

oraz

$$(t,-1)\to\begin{cases}\Big(t+(\alpha+1)^{-1},+1\Big) & \text{jeśli } \left(\dfrac{1+t(\alpha+1)}{p}\right)=1\\[2ex] \left(\dfrac{-1-t(\alpha+1)}{\alpha-1},-1\right) & \text{jeśli } \left(\dfrac{1+t(\alpha+1)}{p}\right)=-1.\end{cases}$$

Przykład

Niech $p = 7$. Zatem w turnieju uczestniczy $n = p + 1 = 8$ par. Mamy wówczas w ciele $\mathbb{Z}_7$ następujące reszty i niereszty kwadratowe:

reszty kwadratowe:	$1, 2, 4;$
niereszty kwadratowe:	$3, 5, 6.$

Przydatna będzie również tablica elementów odwrotnych modulo 7:

$$\begin{aligned} 1^{-1} &= 1; \\ 2^{-1} &= 4; \\ 3^{-1} &= 5; \\ 4^{-1} &= 2; \\ 5^{-1} &= 3; \\ 6^{-1} &= 6. \end{aligned}$$

Przystępujemy teraz do konstrukcji karty pilotującej turnieju Howella dla 8 par. Najpierw definiujemy

$$\alpha = \frac{p+5}{4} = 3.$$

Mamy wówczas

$$\alpha - 1 = 2, \quad (\alpha - 1)^{-1} = 4$$

oraz

$$\alpha + 1 = 4, \quad (\alpha + 1)^{-1} = 2.$$

Gra toczy się na stole o numerze 0 i na stołach, których numery są resztami kwadratowymi modulo 7. Zatem są to stoły o numerach: 0, 1, 2, 4. Stoły o numerach 3, 5 i 6 są zbiornicami. Karty w kolejnych rundach przechodzą na stół o numerze o 1 większym, czyli ze stołu o numerze i na stół o numerze $i + 1$, przy czym dodawanie jest brane modulo 7. Zatem karty poruszają się według schematu:

$$\rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \mathrm{Z} \rightarrow 4 \rightarrow \mathrm{Z} \rightarrow \mathrm{Z} \rightarrow$$

Zajmiemy się teraz sposobem poruszania się par. Para numer 8 przez cały czas turnieju zajmuje miejsce przy stole 0, na linii NS. Reguły poruszania się pozostałych par mają postać:

$$
\begin{aligned}
&(0,+1) \to (0,+1),\\
&(0,-1) \to (2,-1),\\
&(t,+1) \to \begin{cases} (3t+2,-1) & \text{jeśli } 5t+1=0 \text{ lub } \left(\dfrac{5t+1}{p}\right)=1\\[2ex] (t+3,+1) & \text{jeśli } \left(\dfrac{5t+1}{p}\right)=-1 \end{cases},\\
&(t,-1) \to \begin{cases} (t+2,-1) & \text{jeśli } \left(\dfrac{4t+1}{p}\right)=1\\[2ex] (5t+3,+1) & \text{jeśli } \left(\dfrac{4t+1}{p}\right)=-1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
&(0,+1) \to (0,+1),\\
&(0,-1) \to (2,-1),\\
&(1,+1) \to (4,+1), && \text{bo 6 jest nieresztą kwadratową},\\
&(1,-1) \to (1,+1), && \text{bo 5 jest nieresztą kwadratową},\\
&(2,+1) \to (1,-1), && \text{bo 4 jest resztą kwadratową},\\
&(2,-1) \to (4,-1), && \text{bo 2 jest resztą kwadratową},\\
&(4,+1) \to (0,-1), && \text{bo } 7 \mid 5\cdot 4+1,\\
&(4,-1) \to (2,+1), && \text{bo 3 jest nieresztą kwadratową}.
\end{aligned}
$$

Ostatecznie karta pilotująca dla par ma postać

$$
\begin{array}{ccccccc}
0\mathrm{WE} & \longrightarrow & 2\mathrm{WE} & \longrightarrow & 4\mathrm{WE} & \longrightarrow & 2\mathrm{NS}\\
\Big\uparrow & & \multicolumn{3}{c}{0 \to 1 \to 2 \to \mathrm{Z} \to 4 \to \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}} & & \Big\downarrow\\
4\mathrm{NS} & \longleftarrow & & 1\mathrm{NS} & & \longleftarrow & 1\mathrm{WE}
\end{array}
$$

Poniższa tabela pokazuje przebieg turnieju. Przenumerujemy teraz pary i stoliki, tak by zgodnie z tradycją brydżową, spełnione były następujące warunki:

(1) karty poruszają się na stolik o numer niższy,

(2) pary przychodzą do stolika 1 na linię WE w kolejności numerów od 1 do 7,

(3) para numer 8 siedzi przez cały czas turnieju przy stoliku 1 na linii NS.

Po tym przenumerowaniu otrzymujemy dokładnie tę samą kartę pilotującą, którą widzieliśmy na początku.

Przebieg turnieju.

Stół 0	Stół 1	Stół 2	Stół 3	Stół 4	Stół 5	Stół 6
$\begin{array}{ccc} & 7 & \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ & 7 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ 3 & \boxed{6} & 3 \\ & 2 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & 4 & \\ 6 & \boxed{5} & 6 \\ & 4 & \end{array}$	$\boxed{4}$	$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 5 & \boxed{3} & 5 \\ & 1 & \end{array}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$
$\begin{array}{ccc} & 7 & \\ 1 & \boxed{1} & 1 \\ & 7 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & 3 & \\ 4 & \boxed{0} & 4 \\ & 3 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & 5 & \\ 0 & \boxed{6} & 0 \\ & 5 & \end{array}$	$\boxed{5}$	$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ 6 & \boxed{4} & 6 \\ & 2 & \end{array}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$
$\begin{array}{ccc} & 7 & \\ 2 & \boxed{2} & 2 \\ & 7 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & 4 & \\ 5 & \boxed{1} & 5 \\ & 4 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & 6 & \\ 1 & \boxed{0} & 1 \\ & 6 & \end{array}$	$\boxed{6}$	$\begin{array}{ccc} & 3 & \\ 0 & \boxed{5} & 0 \\ & 3 & \end{array}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$
$\begin{array}{ccc} & 7 & \\ 3 & \boxed{3} & 3 \\ & 7 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & 5 & \\ 6 & \boxed{2} & 6 \\ & 5 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ 2 & \boxed{1} & 2 \\ & 0 & \end{array}$	$\boxed{0}$	$\begin{array}{ccc} & 4 & \\ 1 & \boxed{6} & 1 \\ & 4 & \end{array}$	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$
$\begin{array}{ccc} & 7 & \\ 4 & \boxed{4} & 4 \\ & 7 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & 6 & \\ 0 & \boxed{3} & 0 \\ & 6 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 3 & \boxed{2} & 3 \\ & 1 & \end{array}$	$\boxed{1}$	$\begin{array}{ccc} & 5 & \\ 2 & \boxed{0} & 2 \\ & 5 & \end{array}$	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$
$\begin{array}{ccc} & 7 & \\ 5 & \boxed{5} & 5 \\ & 7 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ 1 & \boxed{4} & 1 \\ & 0 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ 4 & \boxed{3} & 4 \\ & 2 & \end{array}$	$\boxed{2}$	$\begin{array}{ccc} & 6 & \\ 3 & \boxed{1} & 3 \\ & 6 & \end{array}$	$\boxed{0}$	$\boxed{6}$
$\begin{array}{ccc} & 7 & \\ 6 & \boxed{6} & 6 \\ & 7 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 2 & \boxed{5} & 2 \\ & 1 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} & 3 & \\ 5 & \boxed{4} & 5 \\ & 3 & \end{array}$	$\boxed{3}$	$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ 4 & \boxed{2} & 4 \\ & 0 & \end{array}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$

Wskazówki bibliograficzne.

Przykłady kart pilotujących do turniejów Howella można znaleźć w [3]. Pojęcie turnieju całkowicie zrównoważonego jest wzięte z [4]. Tam też znajduje się dowód twierdzenia mówiącego, że jeśli istnieje turniej całkowicie zrównoważony, to liczba par jest podzielna przez 4. Parker i Mood podają kilka przykładów kart pilotujących, pisząc jednak wyraźnie, że nie znają żadnej metody ogólnej konstruowania takich kart. Przedstawiona w tekście konstrukcja karty pilotującej pochodzi od Berlekampa i Hwanga [1]. Tam też znajduje się dowód twierdzenia ogólniejszego, mówiącego, że jeśli liczba n jest podzielna przez 4 i $n-1$ jest potęgą liczby pierwszej, to istnieje turniej całkowicie zrównoważony dla n par. Więcej informacji o istnieniu tzw. rotacji Howella i blisko z nimi związanymi kwadratami Rooma można znaleźć w [2].

[1] E. R. Berlekamp, F. K. Hwang, Constructions for Balanced Howell Rotations for Bridge Tournaments, *J. Combin. Theory A*, 12 (1972), 159 – 166.

[2] Ch. J. Colbourn, J. H. Dinitz (ed.), The CRC Handbook of Combinatorial Designs, CRC Press, Boca Raton 1996.

[3] Encyklopedia brydża, PWN Warszawa 1996.

[4] E. T. Parker, A. N. Mood, Some Balanced Howell Rotations for Duplicate Bridge Sessions, *Amer. Math. Monthly* 62 (1955), 714 – 716.