Zliczanie drzew; twierdzenie Cayleya.

Zaczniemy od paru faktów pomocniczych.

Twierdzenie. Jeśli f i g są wielomianami (ogólniej: funkcjami różniczkowalnymi) takimi, że

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \big(f'(x) = g'(x)\big),$$
$$\exists x \in \mathbb{R}\ \big(f(x) = g(x)\big),$$

to

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \big(f(x) = g(x)\big).$$

Przypomnienie. Liczba funkcji

$$f : \{1, \ldots, j\} \xrightarrow{\text{na}} \{1, \ldots, n\}$$

jest równa

$$s_{j,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^j = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^j.$$

W szczególności, jeśli $j < n$, to

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^j = 0.$$

Tożsamości Abela.

$$1) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y(y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k} = (x+y+n)^n,$$

$$2) \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k-1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot (x+y+n)^{n-1},$$

$$3) \quad \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2}.$$

Dowody.

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y(y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k} = (x+y+n)^n.$$

Dowodzimy tej równości przez indukcję względem n. Dla $n = 0$ (a także dla $n = 1$) jest ona oczywista. W kroku indukcyjnym zakładamy równość dla $n-1$ oraz dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ i dowodzimy jej dla n.

Dla ustalonego $y \in \mathbb{R}$ definiujemy dwie funkcje:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y(y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k},$$
$$g(x) = (x+y+n)^n.$$

Wówczas

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y(y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} y(y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k} + y(y+n)^n,$$

skąd dostajemy

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} y(y+k)^{k-1}(n-k)(x+n-k)^{n-k-1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\binom{n}{n-k} y(y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k-1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{n-k-1} y(y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k-1} = \\
&= n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} y(y+k)^{k-1}\big((x+1)+(n-1)-k\big)^{(n-1)-k} = \\
&= n \cdot \big((x+1)+y+(n-1)\big)^{n-1} = \\
&= n \cdot (x+y+n)^{n-1} = \\
&= g'(x).
\end{aligned}$$

Następnie podstawiamy $x = -y - n$. Wówczas

$$\begin{aligned}
f(-y-n) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y(y+k)^{k-1}(-y-n+n-k)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y(y+k)^{k-1}(-y-k)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} y(y+k)^{k-1}(y+k)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} y(y+k)^{n-1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} y \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} y^{n-1-j}k^j = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-1}{j} y^{n-j}k^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-1}{j} y^{n-j}k^j = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} y^{n-j} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} k^j = \\
&= 0,
\end{aligned}$$

bo dla $j < n$ mamy

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} k^j = 0.$$

Jednocześnie

$$g(-y-n) = (-y-n+y+n)^n = 0.$$

Stąd wynika, że $f(x) = g(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, co kończy dowód równości 1.

(2) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k-1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot (x+y+n)^{n-1}.$$

Z równości 1 dostajemy

$$\begin{aligned}
(x+y+n)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y(y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y(y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k-1}(x+n-k) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} xy(y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y(y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k-1}(n-k) = \\
&= xy \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k} y(y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k-1} = \\
&= xy \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k-1} + \\
&+ n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} y(y+k)^{k-1}\big((x+1)+(n-1)-k\big)^{(n-1)-k} = \\
&= xy \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k-1} + n\big((x+1)+y+(n-1)\big)^{n-1}. \\
&= xy \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k-1} + n(x+y+n)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k-1} &= \frac{1}{xy} \cdot \big((x+y+n)^n - n(x+y+n)^{n-1}\big) = \\
&= \frac{1}{xy} \cdot (x+y+n)^{n-1}(x+y+n-n) = \\
&= \frac{x+y}{xy} \cdot (x+y+n)^{n-1} = \\
&= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot (x+y+n)^{n-1},
\end{aligned}$$

co kończy dowód równości 2.

(3) $$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2}.$$

Zauważmy najpierw, że

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k-1} = \frac{1}{y}(x+n)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k-1} + \frac{1}{x}(y+n)^{n-1}.$$

Zatem z równości 2 dostajemy

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k-1}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot(x+y+n)^{n-1}-\frac{1}{y}(x+n)^{n-1}-\frac{1}{x}(y+n)^{n-1},$$

czyli

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(y+k)^{k-1}(x+n-k)^{n-k-1}=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\left((x+y+n)^{n-1}-(y+n)^{n-1}\right)+\frac{1}{y}\cdot\left((x+y+n)^{n-1}-(x+n)^{n-1}\right).$$

Teraz przechodzimy do granicy przy $x\to 0$ i $y\to 0$:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}k^{k-1}(n-k)^{n-k-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+n)^{n-1}-n^{n-1}}{x}+\lim_{y\to 0}\frac{(y+n)^{n-1}-n^{n-1}}{y}=2(n-1)n^{n-2},$$

co kończy dowód równości 3.

Różne dowody twierdzenia Cayleya.

Dowód 1. Niech T_n będzie liczbą drzew, których wierzchołki są ponumerowane liczbami od 1 do n. Wówczas

$$T_n=\sum_{k=1}^{n-1}k\binom{n-2}{k-1}T_kT_{n-k}.$$

Na dwa sposoby zliczamy pary (e,T), gdzie e jest gałęzią drzewa T.

(1) Drzewo T możemy wybrać na T_n sposobów; jego krawędź na $n-1$ sposobów. Mamy zatem $(n-1)T_n$ par.

(2) Dla dowolnej liczby $k=1,2,\ldots,n-1$ wybieramy k wierzchołków; dokładniej dobieramy $k-1$ wierzchołków do wierzchołka o numerze 1. Następnie te wierzchołki łączymy w jedno drzewo i pozostałe wierzchołki łączymy w drugie drzewo. Wreszcie prowadzimy dowolną krawędź z jednego drzewa do drugiego – to jest właśnie krawędź e łącząca oba drzewa w drzewo T. Dla danego k otrzymujemy w ten sposób

$$\binom{n-1}{k-1}\cdot T_k\cdot T_{n-k}\cdot k(n-k)$$

par (e,T). Mamy zatem

$$(n-1)T_n=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}k(n-k)T_kT_{n-k}.$$

Stąd dostajemy

$$T_n=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}k(n-k)T_kT_{n-k}=$$

$$=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\binom{n-1}{n-k}kT_kT_{n-k}=$$

$$=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}(n-1)\binom{n-2}{n-k-1}kT_kT_{n-k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}k\binom{n-2}{k-1}T_kT_{n-k}.$$

Podstawiając następnie $n-k$ w miejsce k (czyli sumując w drugą stronę), otrzymujemy

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\binom{n-2}{n-k-1} T_k T_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\binom{n-2}{k-1} T_k T_{n-k}.$$

Zatem

$$2T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-2}{k-1} T_k T_{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\binom{n-2}{k-1} T_k T_{n-k} = n \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} T_k T_{n-k},$$

czyli

$$T_n = \frac{n}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} T_k T_{n-k}.$$

Zauważmy następnie, że

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n}{n-k} \cdot \binom{n-1}{n-k-1} = \frac{n}{n-k} \cdot \binom{n-1}{k} = \frac{n(n-1)}{k(n-k)} \cdot \binom{n-2}{k-1}.$$

Zatem

$$T_n = \frac{n}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} T_k T_{n-k} = \frac{n}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n(n-1)} \binom{n}{k} T_k T_{n-k} = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\binom{n}{k} T_k T_{n-k}.$$

Teraz – przez indukcję – zakładamy, że $T_k = k^{k-2}$ dla $k < n$. Wówczas

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2(n-1)} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\binom{n}{k} k^{k-2}(n-k)^{n-k-2} = \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} = \text{(z tożsamości Abela)} \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \cdot 2(n-1)n^{n-2} = \\ &= n^{n-2}, \end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia Cayleya.

Uwaga. Z twierdzenia Cayleya i tożsamości

$$T_n = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)\binom{n}{k} T_k T_{n-k}$$

otrzymujemy natychmiast tożsamość Abela (3).

Dowód 2. Najpierw wyprowadzimy ważną tożsamość dotyczącą wykładniczej funkcji tworzącej dla liczb Cayleya. Definiujemy najpierw

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{(n-1)!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nT_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nT_n}{n!} x^n.$$

Wówczas

$$\frac{T(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{(n-1)!} x^{n-1} = T_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{T_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{n+1}}{n!} x^n.$$

Następnie

$$T'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{(n-1)!} \cdot n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)T_{n+1}}{n!} x^n$$

oraz

$$\left(\frac{T(x)}{x}\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{T_n}{(n-1)!} \cdot (n-1) x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{T_n}{(n-2)!} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{n+2}}{n!} x^n.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
T'(x) \cdot \frac{T(x)}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)T_{k+1}}{k!} x^k \cdot \frac{T_{n-k+1}}{(n-k)!} x^{n-k} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)T_{k+1}T_{n-k+1}}{k!(n-k)!} \right) x^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)T_{k+1}T_{n-k+1}n!}{k!(n-k)!} \right) x^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} (k+1) \binom{n}{k} T_{k+1}T_{n-k+1} x^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=1}^{n+1} k \binom{n}{k-1} T_k T_{n+2-k} x^n.
\end{aligned}$$

Teraz korzystamy z udowodnionej tożsamości rekurencyjnej

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-2}{k-1} T_k T_{n-k}.$$

Podstawiając $n+2$ w miejsce n, otrzymujemy

$$T_{n+2} = \sum_{k=1}^{n+1} k \binom{n}{k-1} T_k T_{n+2-k}.$$

Zatem

$$T'(x) \cdot \frac{T(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{n+2}}{n!} x^n = \left(\frac{T(x)}{x}\right)'.$$

Stąd wynika, że

$$\frac{\left(\frac{T(x)}{x}\right)'}{\left(\frac{T(x)}{x}\right)} = T'(x),$$

czyli

$$\left(\ln \frac{T(x)}{x}\right)' = T'(x).$$

Zatem

$$\ln \frac{T(x)}{x} = T(x) + C$$

dla pewnej stałej C. Stąd dostajemy

$$\frac{T(x)}{x} = \mathrm{e}^{T(x)+C} = \mathrm{e}^{T(x)} \cdot \mathrm{e}^{C} = d \cdot \mathrm{e}^{T(x)}.$$

Podstawiając $x = 0$, otrzymujemy $d = 1$. Zatem ostatecznie

$$\frac{T(x)}{x} = \mathrm{e}^{T(x)},$$

czyli

$$x = T(x) \cdot \mathrm{e}^{-T(x)}.$$

Przypomnienie z teorii funkcji analitycznych.
Niech funkcja $f(z)$ będzie funkcją analityczną w otoczeniu 0 i niech γ będzie krzywą zamkniętą obiegającą 0 dokładnie jeden raz. Wówczas

$$f^{(m)}(0) = \frac{m!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{m+1}} dz = \frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{z^m} dz.$$

Ponadto, jeśli $f'(0) \neq 0$, to $f(\gamma)$ też jest taką krzywą.

Mamy teraz

$$T_n = \frac{1}{n} \cdot T^{(n)}(0) = \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{T'(z)}{z^n} dz = \frac{(n-1)!}{2\pi i n} \int_\gamma \frac{T'(z)}{\left(T(z) \cdot \mathrm{e}^{-T(z)}\right)^n} dz =$$
$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i n} \int_{T(\gamma)} \frac{dw}{\left(w \cdot \mathrm{e}^{-w}\right)^n} = \frac{(n-1)!}{2\pi i n} \int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^{wn}}{w^n} dw,$$

gdzie $\Gamma = T(\gamma)$.

Rozważmy funkcję

$$g(z) = \mathrm{e}^{zn} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zn)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} z^k.$$

Wówczas

$$g^{(m)}(0) = \frac{m!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(z)}{z^{m+1}} dz.$$

W szczególności

$$g^{(n-1)}(0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(z)}{z^n} dz = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^{wn}}{w^n} dw.$$

Zatem

$$T_n = \frac{1}{n} \cdot g^{(n-1)}(0) = \frac{1}{n} \cdot n^{n-1} = n^{n-2},$$

co kończy dowód twierdzenia Cayleya.

Autorem tego dowodu jest G. Polya (1937).

Dowód 3. Niech $d_1, \ldots, d_n$ będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że

$$d_1 + \ldots + d_n = 2n - 2.$$

Wtedy liczba drzew o wierzchołkach ponumerowanych liczbami od 1 do n i takich, że $\rho(i) = d_i$ dla $i = 1, \ldots, n$, jest równa

$$\frac{(n-2)!}{(d_1 - 1)! \cdot \ldots \cdot (d_n - 1)!}.$$

Dowodzimy tego przez indukcję względem n. Dla $n = 1$ i $n = 2$ jest to oczywiste. Niech więc $n > 2$. Istnieje i takie, że $d_i = 1$. Niech np. $d_n = 1$. Usuwamy z drzewa wierzchołek o numerze n i krawędź łączącą go z wierzchołkiem o numerze np. j. Otrzymane drzewo ma wierzchołki stopni

$$d_1, d_2, \ldots, d_{j-1}, d_j - 1, d_{j+1}, \ldots, d_{n-1}.$$

Takich drzew jest (z założenia indukcyjnego)

$$\frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_{j-1}-1)! \cdot (d_j-2)! \cdot (d_{j+1}-1)! \cdot \ldots \cdot (d_{n-1}-1)!},$$

czyli

$$\frac{(d_j-1)(n-3)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_{n-1}-1)!}.$$

Zatem liczba wszystkich drzew o podanych stopniach wierzchołków jest równa

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(d_j-1)(n-3)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_{n-1}-1)!} &= \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_{n-1}-1)!} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} (d_j - 1) = \\
&= \frac{(n-3)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_{n-1}-1)!} \cdot \big((2n-3) - (n-1)\big) = \\
&= \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_{n-1}-1)!} = \\
&= \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_n-1)!}.
\end{aligned}$$

Teraz skorzystamy z uogólnionego wzoru Newtona. Najpierw definiujemy tzw. **współczynniki wielomianowe** wzorem

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_m!}$$

dla liczb nieujemnych $n, k_1, \ldots, k_m$ takich, że $k_1 + \ldots + k_m = n$. W szczególności, jeśli $k + l = n$, to

$$\binom{n}{k,l} = \frac{n!}{k! \cdot l!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{l}.$$

Wzór dwumianowy Newtona możemy zapisać w postaci

$$(a+b)^n = \sum_{\substack{k,l \geq 0 \\ k+l=n}} \binom{n}{k,l} a^k b^l.$$

Jego uogólnienie ma postać

$$(a_1 + \ldots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m \geq 0 \\ k_1 + \ldots + k_m = n}} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_m^{k_m}.$$

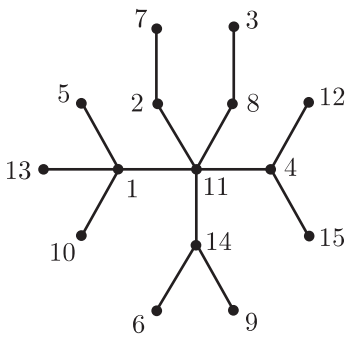
Teraz liczba wszystkich drzew o wierzchołkach ponumerowanych liczbami od 1 do n jest równa

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d_1, \ldots, d_n \geq 1 \\ d_1 + \ldots + d_n = 2n-2}} \frac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_n-1)!} &= \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n \geq 0 \\ k_1 + \ldots + k_n = n-2}} \frac{(n-2)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n \geq 0 \\ k_1 + \ldots + k_n = n-2}} \binom{n-2}{k_1, \ldots, k_n} = \\
&= \big(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n}\big)^{n-2} = n^{n-2}.
\end{aligned}$$

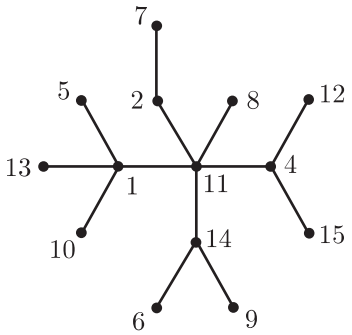
Dowód 4. Każdemu drzewu, którego wierzchołki są ponumerowane liczbami od 1 do n, przyporządkowujemy tzw. **kod Prüfera**, czyli ciąg $(a_1, \ldots, a_{n-2})$ liczb ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Algorytm przyporządkowania jest następujący:

Niech n będzie liczbą wierzchołków drzewa;
niech P będzie pustym ciągiem liczb;
dopóki $n > 2$, powtarzaj
  $v :=$ najmniejszy numer liścia (czyli wierzchołka stopnia 1);
  $w :=$ numer wierzchołka sąsiadującego z v;
  usuń z drzewa wierzchołek v i krawędź vw;
  dopisz w na końcu ciągu P;
  $n := n - 1$;
zwróć kod Prüfera P.

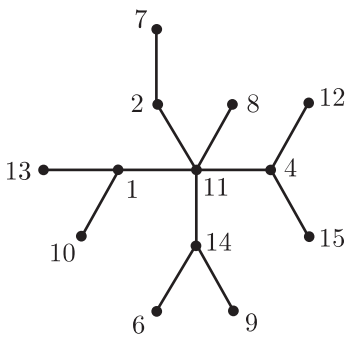
Obejrzyjmy teraz ciąg rysunków ilustrujący powstawanie kodu Prüfera dla następującego drzewa o 15 wierzchołkach.



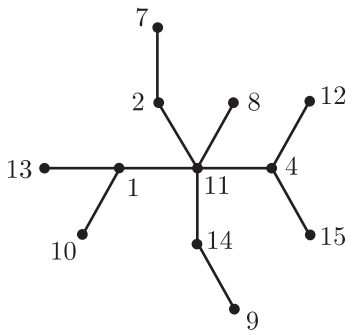
Na początku kodem P jest ciąg pusty. Najmniejszym numerem liścia jest 3; ten liść sąsiaduje z wierzchołkiem numer 8. Usuwamy z drzewa wierzchołek 3 i krawędź $3 - 8$. Na końcu kodu P dopisujemy 8, a więc teraz $P = (8)$. Oto nowe drzewo:



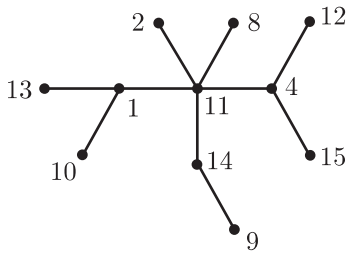
Teraz usuwamy krawędź $1 - 5$ i wydłużamy kod, dopisujęc 1 na końcu: $P = (8, 1)$. Nowe drzewo ma postać:



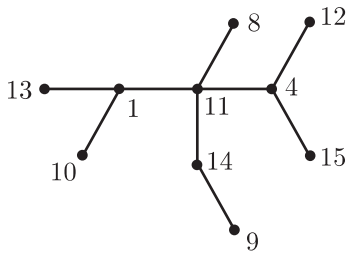
Następnie usuwamy krawędź $6-14$ i na końcu kodu dopisujemy 14: $P=(8,1,14)$. Otrzymujemy drzewo:



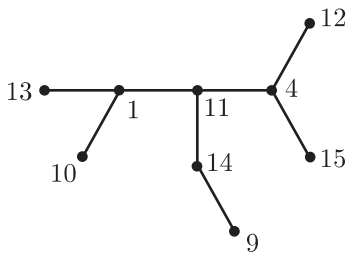
Usuwamy krawędź $2-7$ i dopisujemy 2: $P=(8,1,14,2)$. Otrzymujemy drzewo:



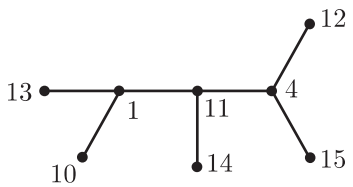
Usuwamy krawędź $2-11$ i dopisujemy 11: $P=(8,1,14,2,11)$. Otrzymujemy drzewo:



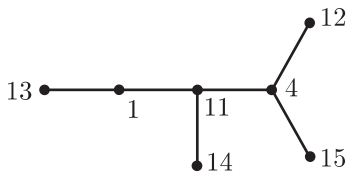
Usuwamy krawędź $8-11$ i dopisujemy 11: $P=(8,1,14,2,11,11)$. Otrzymujemy drzewo:



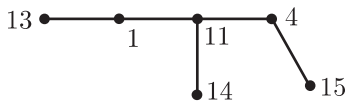
Usuwamy krawędź $9-14$ i dopisujemy 14: $P=(8,1,14,2,11,11,14)$. Otrzymujemy drzewo:



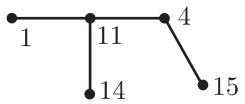
Usuwamy krawędź $1-10$ i dopisujemy 1: $P = (8, 1, 14, 2, 11, 11, 14, 1)$. Otrzymujemy drzewo:



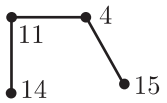
Usuwamy krawędź $4-12$ i dopisujemy 4: $P = (8, 1, 14, 2, 11, 11, 14, 1, 4)$. Otrzymujemy drzewo:



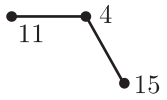
Usuwamy krawędź $1-13$ i dopisujemy 1: $P = (8, 1, 14, 2, 11, 11, 14, 1, 4, 1)$. Otrzymujemy drzewo:



Usuwamy krawędź $1-11$ i dopisujemy 11: $P = (8, 1, 14, 2, 11, 11, 14, 1, 4, 1, 11)$. Otrzymujemy drzewo:



Usuwamy krawędź $11-14$ i dopisujemy 11: $P = (8, 1, 14, 2, 11, 11, 14, 1, 4, 1, 11, 11)$. Otrzymujemy drzewo:



Usuwamy krawędź $4-11$ i dopisujemy 4: $P = (8, 1, 14, 2, 11, 11, 14, 1, 4, 1, 11, 11, 4)$. Otrzymujemy drzewo:

Ostatnie drzewo ma tylko dwa wierzchołki, więc kończymy algorytm. Otrzymany ciąg

$$P = (8, 1, 14, 2, 11, 11, 14, 1, 4, 1, 11, 11, 4)$$

jest kodem Prüfera naszego drzewa.

Zauważmy jeszcze, że jeśli drzewo ma tylko dwa wierzchołki, to algorytm od razu zwróci nam ciąg pusty jako jego kod Prüfera. Rzeczywiście, jest tylko jedno drzewo o dwóch wierzchołkach (wierzchołki o numerach 1 i 2 połączone krawędzią) i jego kodem jest ciąg pusty.

Powyższy algorytm pozwala utworzyć jednoznacznie kod Prüfera z dowolnego drzewa o wierzchołkach ponumerowanych liczbami od 1 do n. Okazuje się, że na odwrót: z każdego kodu Prüfera można jednoznacznie utworzyć drzewo. Co więcej, jeśli dla danego drzewa utworzymy kod Prüfera, a następnie z tego kodu utworzymy drzewo, to otrzymamy nasze wyjściowe drzewo. Nietrudny dowód tego faktu pozostawimy jako ćwiczenie.

A oto algorytm tworzenia drzewa o zadanym kodzie Prüfera P.

Niech P będzie ciągiem długości $n-2$ liczb ze zbioru $\{1,\ldots,n\}$;
$L := (1,\ldots,n)$;
dopóki ciąg P jest niepusty, powtarzaj
  $l :=$ najmniejsza liczba w ciągu L nie występująca w P;
  $p :=$ pierwszy wyraz ciągu P;
  utwórz krawędź lp;
  usuń l z ciągu L;
  usuń p z ciągu P;
utwórz krawędź lp, gdzie l i p są ostatnimi dwiema liczbami w ciągu L.

Następujący ciąg rysunków ilustruje budowanie drzewa o 15 wierzchołkach, którego kodem Prüfera jest ciąg

$$(8,1,14,2,11,11,14,1,4,1,11,11,4).$$

Najpierw tworzymy dwa ciągi:

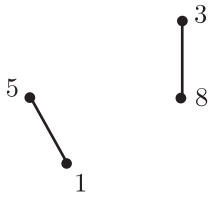
$$P = (8,1,14,2,11,11,14,1,4,1,11,11,4) \qquad L = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15).$$

Najmniejszą liczbą w ciągu L, która nie występuje w ciągu P jest 3. Pierwszą liczbą w ciągu P jest 8. Tworzymy krawędź $3-8$:

i usuwamy liczby 8 i 3 odpowiednio z ciągów P i L. Otrzymujemy ciągi

$$P = (1,14,2,11,11,14,1,4,1,11,11,4) \qquad L = (1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15).$$

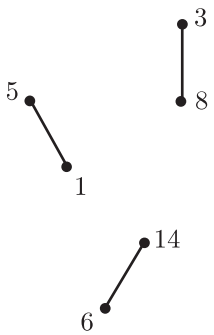
Z ciągu L usuwamy teraz liczbę 5, z ciągu P liczbę 1, tworząc krawędź $1-5$:



Otrzymujemy ciągi

$$P = (14,2,11,11,14,1,4,1,11,11,4) \qquad L = (1,2,4,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15).$$

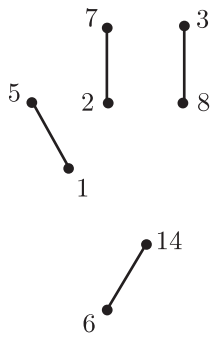
Z ciągu L usuwamy liczbę 6, z ciągu P liczbę 14, tworząc krawędź $6-14$:



Otrzymujemy ciągi

$$P = (2, 11, 11, 14, 1, 4, 1, 11, 11, 4) \qquad L = (1, 2, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15).$$

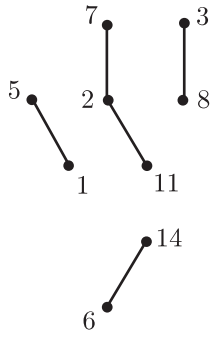
Z ciągu L usuwamy liczbę 7, z ciągu P liczbę 2, tworząc krawędź $2 - 7$:



Otrzymujemy ciągi

$$P = (11, 11, 14, 1, 4, 1, 11, 11, 4) \qquad L = (1, 2, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15).$$

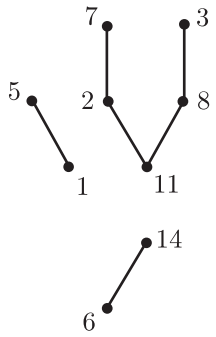
Z ciągu L usuwamy liczbę 2, z ciągu P liczbę 11, tworząc krawędź $2 - 11$:



Otrzymujemy ciągi

$$P = (11, 14, 1, 4, 1, 11, 11, 4) \qquad L = (1, 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15).$$

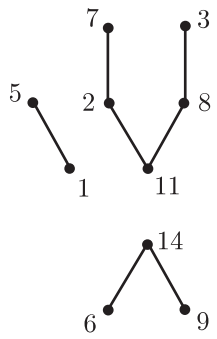
Z ciągu L usuwamy liczbę 8, z ciągu P liczbę 11, tworząc krawędź $8 - 11$:



Otrzymujemy ciągi

$$P = (14, 1, 4, 1, 11, 11, 4) \qquad L = (1, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15).$$

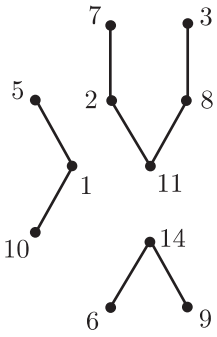
Z ciągu L usuwamy liczbę 9, z ciągu P liczbę 14, tworząc krawędź $9 - 14$:



Otrzymujemy ciągi

$$P = (1, 4, 1, 11, 11, 4) \qquad L = (1, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 15).$$

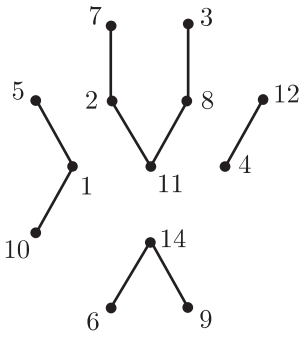
Z ciągu L usuwamy liczbę 10, z ciągu P liczbę 1, tworząc krawędź $1 - 10$:



Otrzymujemy ciągi

$$P = (4, 1, 11, 11, 4) \qquad L = (1, 4, 11, 12, 13, 14, 15).$$

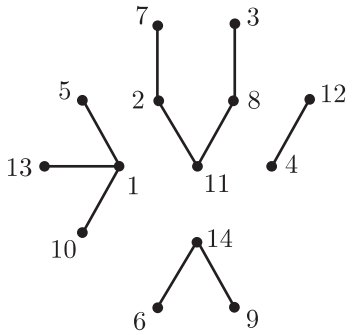
Z ciągu L usuwamy liczbę 12, z ciągu P liczbę 4, tworząc krawędź $4 - 12$:



Otrzymujemy ciągi

$$P = (1, 11, 11, 4) \qquad L = (1, 4, 11, 13, 14, 15).$$

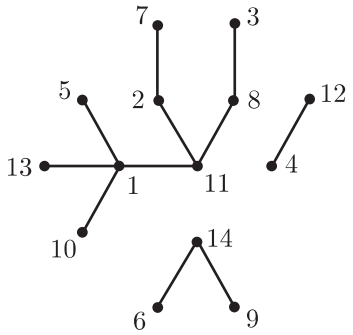
Z ciągu L usuwamy liczbę 13, z ciągu P liczbę 1, tworząc krawędź $1-13$:



Otrzymujemy ciągi

$$P = (11, 11, 4) \qquad L = (1, 4, 11, 14, 15).$$

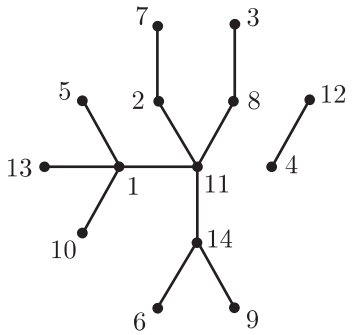
Z ciągu L usuwamy liczbę 1, z ciągu P liczbę 11, tworząc krawędź $1-11$:



Otrzymujemy ciągi

$$P = (11, 4) \qquad L = (4, 11, 14, 15).$$

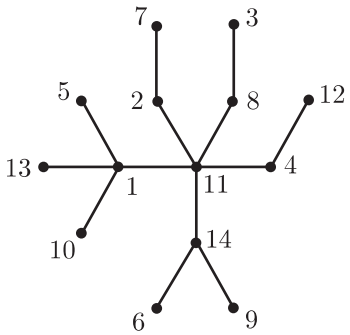
Z ciągu L usuwamy liczbę 14, z ciągu P liczbę 11, tworząc krawędź $11-14$:



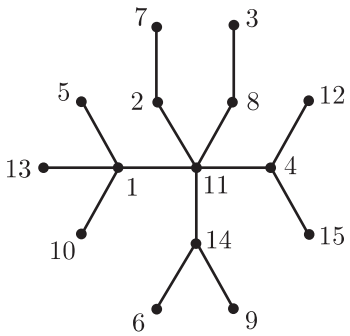
Otrzymujemy ciągi

$$P = (4) \qquad L = (4, 11, 15).$$

Z ciągu L usuwamy liczbę 11, z ciągu P liczbę 4, tworząc krawędź $4-11$:



Otrzymujemy ciągi

$$P = \varnothing \qquad L = (4, 15).$$

W ciągu L pozostały dwie liczby: 4 i 15. Dołączamy do ostatniego drzewa krawędź $4 - 15$, otrzymując drzewo, od którego rozpoczęliśmy naszą procedurę: