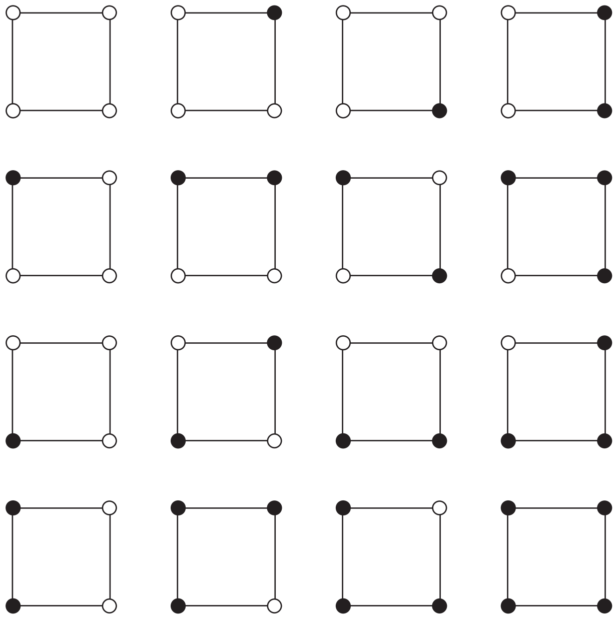
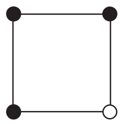
Zliczanie kolorowań; lemat Burnside'a.

Popatrzmy na cztery przykłady.

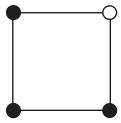
Przykład 1. Wierzchołki kwadratu można pokolorować co najwyżej dwoma kolorami na 16 różnych sposobów:



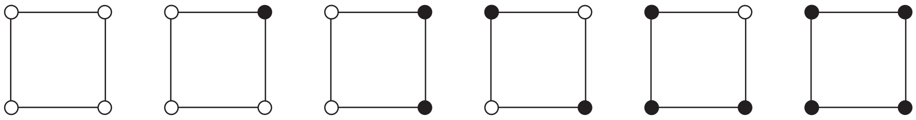
Przykład 2. Niektóre z kolorowań pokazanych w przykładzie 1 możemy uznać za jednakowe w tym sensie, że pewna izometria kwadratu przeprowadza jedno z tych kolorowań na drugie. Na przykład kolorowanie



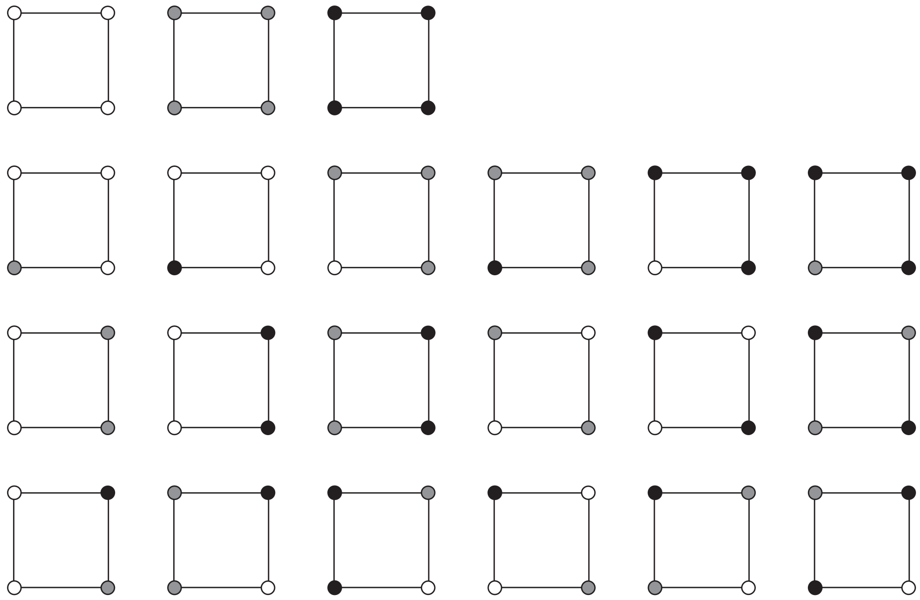
powstaje z kolorowania



przez obrót o 90° w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Takie kolorowania będziemy nazywać kolorowaniami geometrycznie nierozróżnialnymi. Okazuje się, że istnieje dokładnie 6 geometrycznie rozróżnialnych kolorowań wierzchołków kwadratu za pomocą co najwyżej dwóch kolorów:

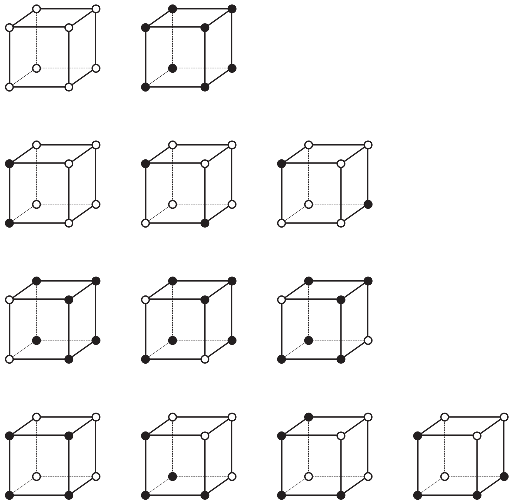


Przykład 3. Używając trzech kolorów można pokolorować wierzchołki kwadratu na 21 geometrycznie rozróżnialnych sposobów:



W ostatnim przykładzie będziemy kolorować wierzchołki sześcianu. Dwa kolorowania uważamy za identyczne (geometrycznie nierozróżnialne), jeśli jedno można otrzymać z drugiego przez odpowiedni obrót sześcianu.

Przykład 4. Wierzchołki sześcianu można pokolorować na dokładnie 23 geometrycznie rozróżnialne sposoby za pomocą co najwyżej dwóch kolorów:



Definicja geometrycznej nierozróżnialności zależy od tego, jakie izometrie będziemy rozważać. Gdybyśmy w ostatnim przykładzie dopuścili wszystkie izometrie sześcianu (czyli również symetrie), to otrzymalibyśmy dokładnie 22 geometrycznie rozróżnialne kolorowania za pomocą co najwyżej dwóch kolorów. Pozostawimy Czytelnikowi jako ćwiczenie znalezienie dwóch kolorowań, które są rozróżnialne, gdy rozpatrujemy wyłącznie obroty sześcianu i są nierozróżnialne, gdy dopuścimy również symetrie.

Widzimy więc, że definicja geometrycznej rozróżnialności kolorowań zależy od tego, jaką grupę izometrii będziemy rozpatrywać. Problemem rozróżnialności kolorowań zajmiemy się teraz bardziej ogólnie.

Niech będzie dany zbiór skończony A. Kolorowaniem zbioru A nazwiemy dowolną funkcję

$$c : A \to \{1, \ldots, k\}.$$

Mówimy tez wtedy, że elementy zbioru A kolorujemy za pomocą k kolorów (nawet, jeśli nie wszystkie kolory zostały użyte). Niech K będzie zbiorem wszystkich kolorowań zbioru A za pomocą k kolorów. Przypuśćmy następnie, że dana jest pewna grupa G przekształceń zbioru A na siebie (czyli podgrupa grupy wszystkich permutacji zbioru A). Definiujemy teraz grupę G^* przekształceń zbioru K. Dla dowolnego przekształcenia $\pi \in G$ definiujemy przekształcenie

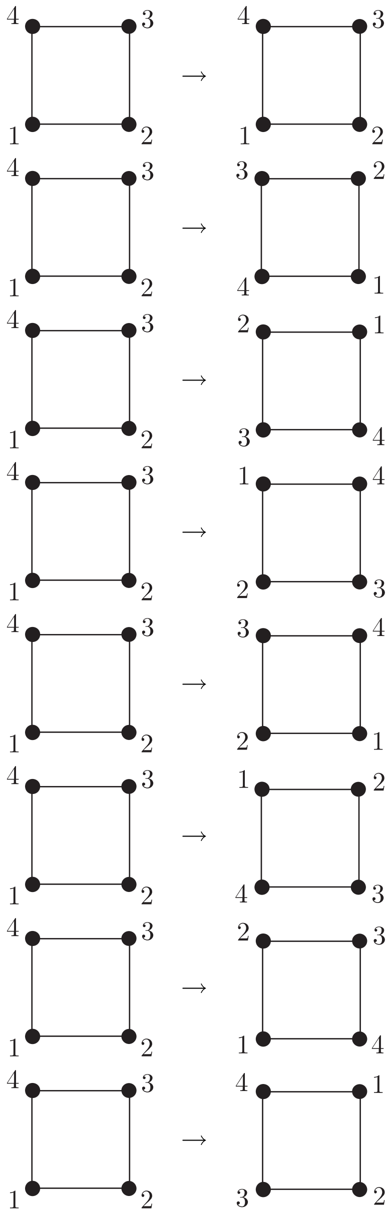
$$\pi^* : K \to K$$

wzorem $\pi^*(c) = c \circ \pi^{-1}$. Wreszcie przyjmujemy

$$G^* = \{\pi^* : \ \pi \in G\}.$$

Ćwiczenie. Jeśli $k \geq 2$, $\pi, \sigma \in G$ oraz $\pi \neq \sigma$, to $\pi^* \neq \sigma^*$. W szczególności $|G^*| = |G|$.

Przykład 5. Niech A będzie zbiorem wierzchołków kwadratu. Grupa G wszystkich izometrii kwadratu składa się z następujących 8 przekształceń:



$\pi_0 = (1)(2)(3)(4)$

$\pi_1 = (1,2,3,4)$

$\pi_2 = (1,3)(2,4)$

$\pi_3 = (1,4,3,2)$

$\pi_4 = (1,2)(3,4)$

$\pi_5 = (1,4)(2,3)$

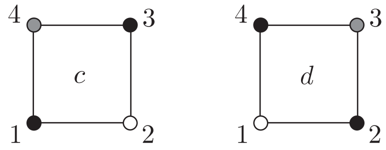
$\pi_6 = (1)(2,4)(3)$

$\pi_7 = (1,3)(2)(4)$

Popatrzmy na następujące dwa kolorowania

$$c, d : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3\}$$

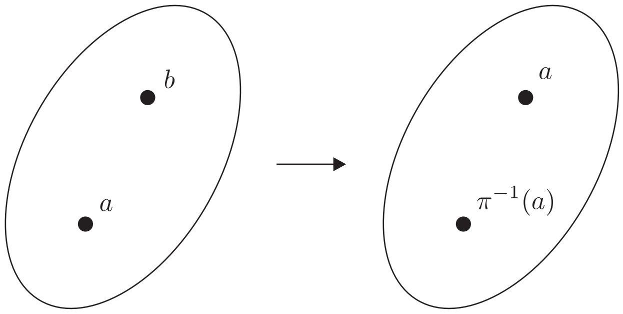
(kolorowi białemu odpowiada liczba 1, kolorowi szaremu liczba 2 i kolorowi czarnemu liczba 3):



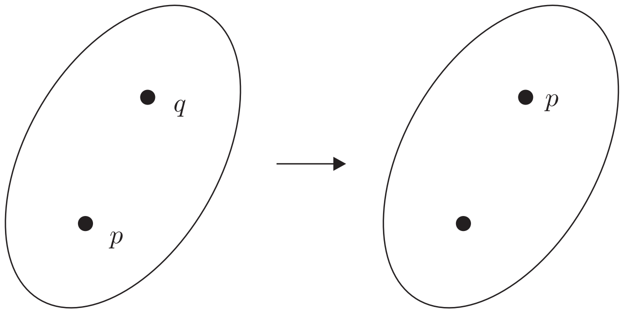
Zauważmy, że kolorowanie d powstało przez „obrócenie” kolorowania c o 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara, czyli w taki sposób, w jaki działa na wierzchołkach kwadratu przekształcenie π_3. Pokażemy, że rzeczywiście $d = \pi_3^*(c)$. Mianowicie

$$\begin{aligned}
\pi_3^*(c)(1) &= c(\pi_3^{-1}(1)) = c(2) = 1 = d(1),\\
\pi_3^*(c)(2) &= c(\pi_3^{-1}(2)) = c(3) = 3 = d(2),\\
\pi_3^*(c)(3) &= c(\pi_3^{-1}(3)) = c(4) = 2 = d(3),\\
\pi_3^*(c)(4) &= c(\pi_3^{-1}(4)) = c(1) = 3 = d(4).
\end{aligned}$$

Przykład 6. Ogólniej, przypuśćmy, że przekształcenie $\pi \in G$ przeprowadza element $a \in A$ na element $b \in A$, tzn. $\pi(a) = b$:



Przypuśćmy następnie, że elementy a i b zostały pokolorowane (w kolorowaniu c) kolorami p i q. Przekształcenie π^* zamienia wtedy kolory w następujący sposób:



Mamy wówczas

$$\pi^*(c)(b) = p = c(a) = c(\pi^{-1}(b)) = c \circ \pi^{-1}(b),$$

czyli

$$\pi^*(c) = c \circ \pi^{-1}.$$

Mówimy teraz, że dwa kolorowania c i d zbioru A są nierozróżnialne (ze względu na grupę G), jeśli istnieje przekształcenie $\pi \in G$ takie, że $\pi^*(c) = d$. Interesuje nas wyznaczenie liczby kolorowań rozróżnialnych ze względu na grupę G.

Definicja. Jeśli G jest pewną grupą przekształceń zbioru A oraz $a \in A$, to **orbitą** elementu a (ze względu na grupę G) nazywamy zbiór

$$O(a) = \{\pi(a) : \ \pi \in G\}.$$

Naszym celem jest więc wyznaczenie liczby orbit grupy G^* w zbiorze K.

Definicja. Niech G będzie pewną grupą przekształceń zbioru A i niech $a \in A$. Wówczas **stabilizatorem** elementu a nazywamy zbiór

$$S(a) = \{\pi \in G : \ \pi(a) = a\}.$$

Nietrudno zauważyć, że stabilizator elementu a jest podgrupą grupy G. Udowodnimy następujący lemat:

Lemat. Dla każdego elementu a zbioru A zachodzi równość

$$|S(a)| \cdot |O(a)| = |G|.$$

Dowód. Niech $O(a) = \{b_1, \ldots, b_r\}$. Wybieramy takie przekształcenia $\pi_1, \ldots, \pi_r \in G$, by

$$\pi_1(a) = b_1, \ldots, \pi_r(a) = b_r.$$

Niech $P = \{\pi_1, \ldots, \pi_r\}$. Oczywiście $|P| = |O(a)|$. Pokażemy, że każde przekształcenie $\pi \in G$ można przedstawić jednoznacznie w postaci $\pi = \sigma \circ \rho$, gdzie $\sigma \in P$ oraz $\rho \in S(a)$. To oczywiście zakończy dowód.

Niech więc $\pi \in G$. Niech następnie $\pi(a) = b_s$, gdzie $1 \leq s \leq r$. Zatem $\pi(a) = \pi_s(a)$. Przyjmijmy

$$\sigma = \pi_s, \quad \rho = \pi_s^{-1} \circ \pi.$$

Oczywiście

$$\sigma \circ \rho = \pi_s \circ (\pi_s^{-1} \circ \pi) = \pi.$$

Ponadto $\sigma = \pi_s \in P$. Pokażemy, że $\rho \in S(a)$. Mianowicie

$$\rho(a) = (\pi_s^{-1} \circ \pi)(a) = \pi_s^{-1}(\pi(a)) = \pi_s^{-1}(\pi_s(a)) = a.$$

To dowodzi, że przekształcenie π może być przedstawione w żądanej postaci.

Przypuśćmy teraz, że

$$\pi_s \circ \rho = \pi_t \circ \tau,$$

gdzie $1 \leq s, t \leq r$ oraz $\rho, \tau \in S(a)$. Wówczas

$$\begin{aligned}
(\pi_s \circ \rho)(a) &= (\pi_t \circ \tau)(a), \\
\pi_s(\rho(a)) &= \pi_t(\tau(a)), \\
\pi_s(a) &= \pi_t(a), \\
b_s &= b_t, \\
s &= t.
\end{aligned}$$

Zatem $\pi_s = \pi_t$, skąd oczywiście wynika, że $\rho = \tau$, co kończy dowód lematu.

Definicja. Niech G będzie pewną grupą przekształceń zbioru A i niech $\pi \in G$. Wtedy **charakterem** przekształcenia π nazywamy liczbę tych $a \in A$, dla których $\pi(a) = a$:

$$\chi(\pi) = |\{a \in A : \ \pi(a) = a\}|.$$

Udowodnimy teraz następujący lemat:

Lemat Burnside'a. Niech G będzie pewną grupą przekształceń zbioru A. Wtedy liczba orbit w zbiorze A (ze względu na grupę G) jest równa

$$t(G) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \chi(\pi).$$

Dowód. Będziemy zliczać na dwa sposoby liczbę elementów zbioru

$$X = \{(\pi, a) \in G \times A : \ \pi(a) = a\}.$$

Dla każdego $\pi \in G$ istnieje $\chi(\pi)$ takich $a \in A$, dla których $\pi(a) = a$, czyli $(\pi, a) \in X$. Zatem

$$|X| = \sum_{\pi \in G} \chi(\pi).$$

Z drugiej strony, dla każdego $a \in A$ istnieje $|S(a)|$ takich przekształceń π, dla których $\pi(a) = a$, czyli $(\pi, a) \in X$. Zatem

$$|X| = \sum_{a \in A} |S(a)|.$$

Z poprzedniego lematu wynika, że

$$|X| = \sum_{a \in A} \frac{|G|}{|O(a)|} = |G| \cdot \sum_{a \in A} \frac{1}{|O(a)|}.$$

Przypuśćmy teraz, że zbiór A został rozbity na $r = t(G)$ orbit i niech $b_1, \ldots, b_r$ będą reprezentantami tych orbit. Wówczas

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{|O(a)|} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{a \in O(b_j)} \frac{1}{|O(a)|} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{a \in O(b_j)} \frac{1}{|O(b_j)|} = \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{1}{|O(b_j)|} \cdot \sum_{a \in O(b_j)} 1 \right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{1}{|O(b_j)|} \cdot |O(b_j)| \right) = \sum_{j=1}^{r} 1 = r = t(G).$$

Zatem

$$|X| = |G| \cdot t(G),$$

czyli

$$|G| \cdot t(G) = \sum_{\pi \in G} \chi(\pi),$$

skąd natychmiast wynika teza lematu Burnside'a.

Przypuśćmy teraz, że dany jest zbiór A i pewna grupa G przekształceń zbioru A. Rozważamy zbiór K kolorowań zbioru A za pomocą k kolorów i grupę G^* przekształceń zbioru K. Wówczas liczba orbit grupy G^* jest równa

$$t(G^*) = \frac{1}{|G^*|} \cdot \sum_{\sigma \in G^*} \chi(\sigma) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} \chi(\pi^*).$$

Dla dowolnego przekształcenia $\pi \in G$ chcemy obliczyć $\chi(\pi^*)$. Przypuśćmy zatem, że $c \in K$ Zauważmy, że następujące warunki są równoważne:

$$\begin{gathered}
\pi^*(c) = c, \\
c \circ \pi^{-1} = c, \\
c = c \circ \pi, \\
\forall a \in A \big(c(\pi(a)) = c(a)\big).
\end{gathered}$$

Ostatni warunek jest równoważny temu, że wszystkie elementy tego samego cyklu (w rozkładzie permutacji π na cykle) są pokolorowane tym samym kolorem. Zatem, jeśli $z(\pi)$ oznacza liczbę cykli permutacji π, to

$$\chi(\pi^*) = k^{z(\pi)}.$$

Stąd otrzymujemy wzór

$$t(G^*) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\pi \in G} k^{z(\pi)}.$$

Przykład 7. Przypomnijmy, że grupa izometrii kwadratu (traktowana jako grupa przekształceń zbioru wierzchołków ponumerowanych liczbami 1,2,3,4) składa się z 8 przekształceń:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= (1)(2)(3)(4), \\
\pi_1 &= (1,2,3,4), \\
\pi_2 &= (1,3)(2,4), \\
\pi_3 &= (1,4,3,2), \\
\pi_4 &= (1,2)(3,4), \\
\pi_5 &= (1,4)(2,3), \\
\pi_6 &= (1)(2,4)(3), \\
\pi_7 &= (1,3)(2)(4).
\end{aligned}$$

Zatem liczba geometrycznie rozróżnialnych kolorowań wierzchołków kwadratu za pomocą k kolorów jest równa

$$\frac{1}{8} \cdot (k^4 + k + k^2 + k + k^2 + k^2 + k^3 + k^3) = \frac{1}{8} \cdot (k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k).$$

Dla $k = 2$ otrzymujemy

$$\frac{1}{8} \cdot (2^4 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2) = \frac{1}{8} \cdot (16 + 16 + 12 + 4) = \frac{48}{8} = 6$$

kolorowań. Dla $k = 3$ otrzymujemy

$$\frac{1}{8} \cdot (3^4 + 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3) = \frac{1}{8} \cdot (81 + 54 + 27 + 6) = \frac{168}{8} = 21$$

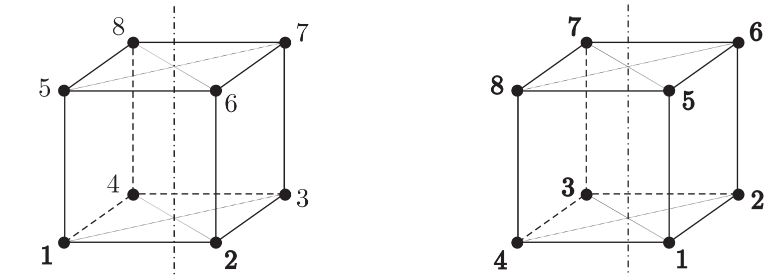
kolorowań.

Przykład 8. Grupa obrotów sześcianu składa się z 24 przekształceń. Znów traktujemy ją jako grupę przekształceń zbioru wierzchołków ponumerowanych liczbami od 1 do 8.

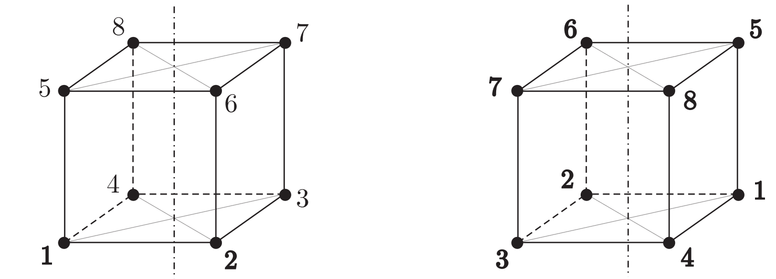
Pierwszym przekształceniem jest identyczność:

$$\pi = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8).$$

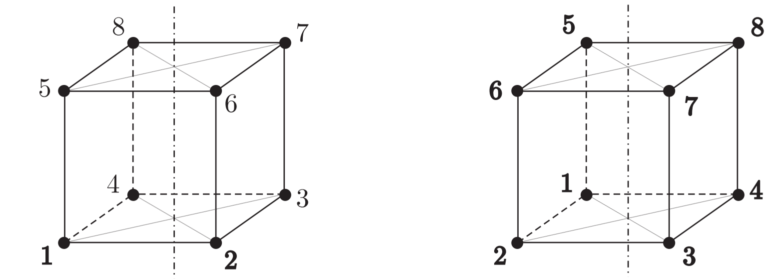
Następnie mamy obroty sześcianu wokół osi przechodzącej przez środki przeciwległych ścian (są 3 takie osie).



Obrót sześcianu o 90°: $\pi = (1,2,3,4)(5,6,7,8)$

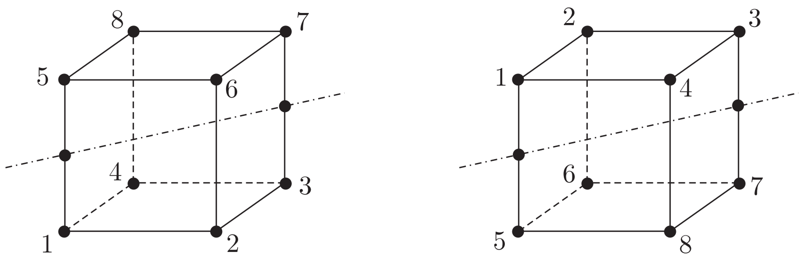


Obrót sześcianu o 180°: $\pi = (1,3)(2,4)(5,7)(6,8)$



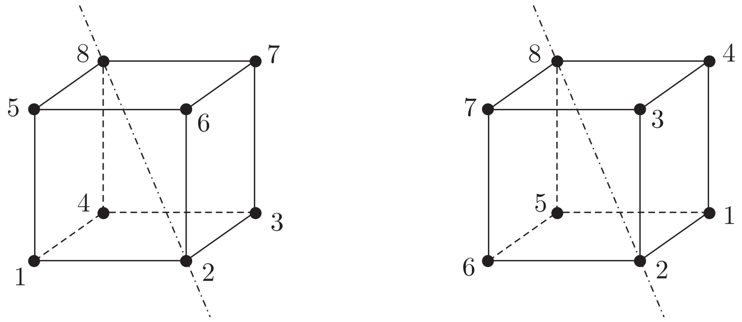
Obrót sześcianu o 270°: $\pi = (1,4,3,2)(5,8,7,6)$

Teraz mamy obrót sześcianu wokół osi przechodzącej przez środki przeciwległych krawędzi (jest 6 takich osi).

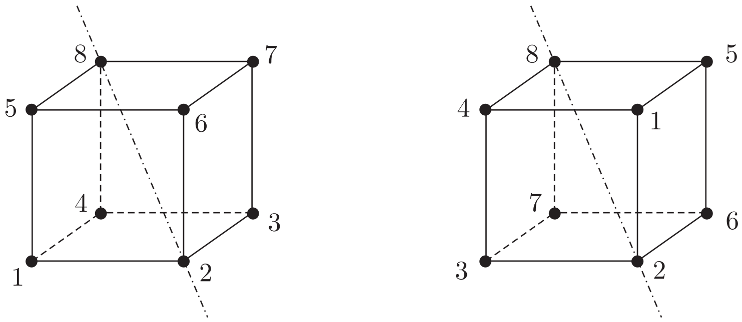


Obrót sześcianu o 180°: $\pi = (1,5)(2,8)(3,7)(4,6)$

Wreszcie mamy obroty sześcianu wokół osi przechodzącej przez przeciwległe wierzchołki (są 4 takie osie).



Obrót sześcianu o 120°: $\pi = (1,3,6)(2)(4,7,5)(8)$



Obrót sześcianu o 240°: $\pi = (1,6,3)(2)(4,5,7)(8)$

Mamy zatem jedną permutację o 8 cyklach, 6 permutacji o 2 cyklach i 17 permutacji o 4 cyklach. Stąd wynika, że liczba geometrycznie rozróżnialnych kolorowań wierzchołków sześcianu za pomocą k kolorów jest równa

$$\frac{1}{24} \cdot (k^8 + 17k^4 + 6k^2).$$

Dla $k = 2$ otrzymujemy

$$\frac{1}{24} \cdot (2^8 + 17 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2) = \frac{1}{24} \cdot (256 + 272 + 24) = \frac{552}{24} = 23$$

kolorowania. W podobny sposób stwierdzamy, że dla $k = 3$ istnieją 333 kolorowania.

Przykład 9. Grupa wszystkich izometrii sześcianu składa się z 48 przekształceń. Wśród tych permutacji zbioru wierzchołków jest jedna mająca 8 cykli, 6 mających 6 cykli, 21 mających 4 cykle i 20 mających 2 cykle. Zatem liczba kolorowań rozróżnialnych ze względu na grupę wszystkich izometrii jest równa

$$\frac{1}{48} \cdot (k^8 + 6k^6 + 21k^4 + 20k^2).$$

Dla $k = 2$ istnieją 22 kolorowania, dla $k = 3$ istnieje 267 kolorowań.