Analiza matematyczna I.
Pula jawnych zadań na kolokwia.

Wydział MIiM UW, 2015/16

ostatnie poprawki: 14 lutego 2016

Szanowni Państwo,

zgodnie z zapowiedzią, na każdym kolokwium w pierwszym semestrze co najmniej jedna trzecia zadań będzie pochodziła wprost z tego zestawu, bądź będzie niewielką modyfikacją poniższych zadań.

Wśród zamieszczonych niżej zadań są łatwiejsze i trudniejsze.

Podkreślamy: *proszę się nie zrażać, jeśli nie będą Państwo umieli zrobić wszystkich od razu.* Materiał jest obszerny i dla większości z Państwa trudniejszy, niż w szkole, szczególnie na samym początku studiów. Ponadto, w matematyce *jest rzeczą normalną, że człowiek pewnych rzeczy nie potrafi* zrobić. Skuteczna nauka wymaga czasu, regularnego treningu i cierpliwości, a także bieżącego kontaktu z materiałem z wykładu. Taka inwestycja przynosi praktycznie zawsze pozytywne skutki.

1 Liczby rzeczywiste. Kresy zbiorów. Indukcja.

1. Udowodnić, że dla wszystkich $x \geq 1000$ zachodzi nierówność

$$x^3 \geq 5x^2 + 14x + 17\,.$$

2. Udowodnić, że liczba $\sqrt{7+\sqrt{2}}$ jest niewymierna.

3. Wykazać, że równanie $x/1 = (1-x)/x$ na liczbę wyrażającą stosunek złotego podziału $x \in (0,1)$ nie ma pierwiastków wymiernych.
Uwaga. Liczbą **złotą** nazywa się liczbę $1/x$, gdzie x to dodatni pierwiastek równania w zadaniu.

4. Niech a i b będą liczbami dodatnimi takimi, że $a^2+b^2 \leq 2$. Udowodnić, że $a+b \leq 2$.

5. Płaszczyznę parametrów $a,\ b \in \mathbb{R}$ podzielić na podzbiory odpowiadające stałej liczbie pierwiastków równania

$$abx^2 + (a+b)x + 1 = 0\,.$$

6. Wykazać, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$(a+b+c)(ab+bc+ac) \geq 9abc\,.$$

7. Wykazać, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$(a+b+c)(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \geq 9\sqrt{abc}\,.$$

8. Wykazać, że liczba $\sqrt{7/13}+\sqrt{13/7}$ jest niewymierna.

9. Rozstrzygnąć, czy liczba $\sqrt{\sqrt{5}+3}+\sqrt{\sqrt{5}-2}$ jest wymierna.
Wskazówka. Zbadać sumę i iloczyn liczb $\sqrt{\sqrt{5}+3} \pm \sqrt{\sqrt{5}-2}$.

10. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem ograniczonym i $\lambda \in \mathbb{R}$. Zbiór λA określamy wzorem

$$\lambda A := \{\lambda a\colon\ a \in A\}\,.$$

Oznaczmy $\sup A = M$ i $\inf A = m$. Wyznaczyć kresy zbioru λA.

11. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}\,.$$

12. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n} \geq \frac{7}{12}\,.$$

13. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n} \geq \frac{2}{3}\,.$$

Wskazówka. Średnia harmoniczna i arytmetyczna.

14. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzą nierówności

$$\frac{n}{2} < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1} < n.$$

15. Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$3\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \geq 2n\sqrt{n}+1\,,$$

przy czym dla $n > 1$ nierówność jest ostra.

16 (*). Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$5\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \geq 2n^2\sqrt{n} + 3\,,$$

przy czym dla $n > 1$ nierówność jest ostra.

17. Wykazać, że dla każdego n naturalnego liczba $13^n - 7$ jest podzielna przez 6.

18. Wykazać, że jeśli n jest liczbą naturalną parzystą, to liczba $n^3 + 20n$ dzieli się przez 48 ($= 3 \cdot 2^4$).

19. Udowodnić, że dla liczb całkowitych $0 \leq k < l \leq n/2$ mamy $\binom{n}{k} < \binom{n}{l}$.

20. Udowodnić, że jeśli $n \geq 4$ jest liczbą naturalną, to

$$\binom{2n}{n} \geq n \cdot 2^n\,.$$

21. Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n}\sqrt{n} \geq 2^{2n-1}\,.$$

22 (*). Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$4^{n-1}\binom{3n}{n}\sqrt{n} \geq 3^{3n-2}\,.$$

23. Czy zbiór $A = \{2^n/3^k,$ gdzie k, n naturalne i $k \geq n\}$ jest ograniczony z góry? A z dołu? Proszę uzasadnić obie odpowiedzi. Jeśli któraś z nich jest twierdząca, wyznaczyć odpowiedni kres zbioru A.

24. Dane są liczby $a_n \in [0,1]$, gdzie $n = 1, 2, \ldots$. Udowodnić, że zbiór

$$A = \left\{ \frac{a_n}{n} \ : \ n = 1, 2, \ldots \right\}$$

jest ograniczony i $\inf A = 0$.

25. Wyznaczyć kresy górne i dolne zbiorów

$$A = \left\{ \frac{11}{k} - \frac{3}{m} \ : \ k, m \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B = \left\{ \frac{2}{k} + \frac{3}{m} - \frac{4}{n} \ : \ k, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Czy te kresy są osiągane?

26. Zbadać istnienie i – w przypadku istnienia – wyznaczyć wartości kresów zbiorów

$$A = \left\{ \frac{m+n}{m+n+1} : m,\, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B = \left\{ \frac{m+n}{m^2+n+1} : m,\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Czy znalezione kresy są osiągane?

27. Udowodnić, że $(n!)^2 \geq n^{n+1}$ dla $n \geq 7$.

28. Udowodnić, że zbiór

$$\left\{ \frac{n^n}{(n!)^2} \ : \ n = 1, 2, \ldots \right\}$$

jest ograniczony. Wyznaczyć jego kresy.

29. Wyznaczyć kresy zbiorów

$$A = \{|x-1| + |x+1| \ : \ x \in \mathbb{R} \text{ oraz } |x| < 2\}, \qquad B = \{|x-1| - |x+1| \ : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

30. Znaleźć $\inf A$ i $\sup A$, gdzie

$$A = \{x + y + z \ : \ x, y, z > 0,\ xyz = 1\}.$$

31. Znaleźć

a) $\inf \left\{ \sqrt[n]{n} - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} : n \in \mathbb{N} \right\}$,

b) $\sup \left\{ \sqrt[n]{n} - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} : n \in \mathbb{N} \right\}$,

c) $\inf \left\{ \frac{n^{200} + 1.01^n}{n^{100} + 1.02^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

32. Zbiór niepusty i ograniczony z dołu $A \subset \mathbb{R}$ ma tę własność, że dla każdej liczby $a \in A$ istnieje liczba $b \in A$ taka, że $b \leq a/2 + 1$. Wykazać, że $\inf A \leq 2$.

33. Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru $\{(x+y)(x^{-1} + y^{-1}) \mid x, y > 0\}$.

34. Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru

$$A = \left\{ \frac{n - k^2}{n^2 + k^3} : n, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

35. Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru

$$\left\{ \frac{n2^m}{m2^n} \mid n > m \geq 1 \quad n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

36. Wyznaczyć kres górny i dolny zbioru

$$\left\{ \frac{m^2 - n}{m^2 + n^2} \ : \ n, m \in \mathbb{N}, \ m > n \right\}.$$

37. Znaleźć kresy zbioru A, jego element największy lub wykazać, że takowy nie istnieje oraz element najmniejszy lub wykazać, że takowy nie istnieje, jeśli

$$A = \left\{ \frac{2013n + k}{n + 2013k} : \quad n, k \in \mathbb{Z}, \ n, k \geq 10000 \right\} .$$

38. Zbiór niepusty $A \subset (0, \infty)$ ma tę własność, że jeśli $a \in A$, to $\frac{1}{a} \in A$. Wykazać, że jeśli A jest ograniczony z góry, to $\inf A \cdot \sup A = 1$.

39. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzą nierówności

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} .$$

40. Wykazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{n^4} \leq 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

41. Znaleźć wzór na

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

i udowodnić go.

42. Udowodnić, że prawdziwy jest następujący wzór:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{2\,[n/2]} = 2^{n-1}.$$

43. Wykazać, że

$$0^2 \binom{n}{0} + 1^2 \binom{n}{1} + 2^2 \binom{n}{2} + \cdots + n^2 \binom{n}{n} = n(1 + n) \cdot 2^{n-2}.$$

Wskazówka. Zauważyć, że $k^2 = k(k-1) + k$ i obliczyć dwie sumy.

44. Załóżmy, że (s_k) jest ciągiem liczb rzeczywistych nieujemnych, $s_1 \leq 1$, i dla każdego $k \geq 1$ spełniona jest nierówność

$$s_{k+1} \leq 2k + 3 \sum_{j=1}^{k} s_j .$$

Wykazać, że $s_k < 7^k$ dla wszystkich k naturalnych.
Wskazówka. $2k < 1 + 2k \leq (1 + 2)^k$ na mocy nierówności Bernoulli'ego.

45. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić nierówność

$$(n+1)^{n+1} > (n+2)^n.$$

46. Znaleźć kres górny zbioru

$$\left\{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012} \mid a+b+c=1,\ a,b,c>0\right\}.$$

47. Niech $(a_n)_n$ będzie ciągiem ściśle rosnącym o wyrazach naturalnych (w zadaniu przyjmujemy, że $0 \notin \mathbb{N}$) . Wykazać, że

a) dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ ciąg $b_n := \dfrac{a_n + a_m}{a_m 2^{a_n}}$ jest malejący,

b)
$$\inf\left\{\frac{a_n + a_m}{a_m 2^{a_n}} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\} = 0,$$

c)
$$\sup\left\{\frac{a_n + a_m}{a_m 2^{a_n}} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\} = 2^{1-a_1}.$$

2 Ciągi i granice.

48. Czy któryś z poniższych ciągów jest monotoniczny? Monotoniczny dla dostatecznie dużych n?

$$a_n = n\sqrt{n^2+1} - n^2, \qquad b_n = n^2 - n\sqrt{n^2-1}.$$

Odpowiedź oczywiście należy uzasadnić.

49. Obliczyć granice następujących ciągów:

$$a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}, \qquad b_n = \frac{9+16+\cdots+(7n+2)}{n^2}.$$

50. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie:

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = 7, \qquad a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n \quad \text{dla n=1,2,\ldots}$$

Udowodnić, że $a_n = 2^{n-1} + 5^{n-1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

51. Dla jakich liczb rzeczywistych $p > 1$ ciąg $(\sqrt{n^p+n+1} - \sqrt{n^p-n+1})$ jest ograniczony?

52. Obliczyć granice następujących ciągów:

$$a_n = \frac{3 + (-1)^n + 9\sqrt{n} - 7n^5 - 2[\sqrt[3]{n}]n}{(3n-1)(n-2)(2n-3)(n-4)(4n-5) + 2^{-n}},$$

$$b_n = -3n^3 + \sqrt{9n^6 + 7n^3 + (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) - 10n^2}.$$

53. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+2}+\frac{1}{n^2+4}+\dots\frac{1}{n^2+2n}\right)n.$$

54. Dla każdego z poniższych ciągów zbadać, czy ma on granicę, a jeżeli tak, to obliczyć jej wartość.

$$a_n=\frac{(\sqrt{11n^2+3n+\sqrt{n^3}}-\sqrt{11n^2+1})^{15}}{(1,001-\frac{1}{n})^n},\qquad b_n=\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n^2}k^{1000}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^k},$$

$$c_n=\sqrt[n]{\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}},\qquad d_n=\sqrt[2^n]{2^n-n}.$$

55. Dla każdego z poniższych ciągów zbadać, czy ma on granicę, a jeżeli tak, to obliczyć jej wartość.

$$a_n=\sqrt[n]{3^n+n^{100}-(2,999)^n},\qquad b_n=\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}+\frac{n^5}{5^n}+\frac{1}{2^{nn^{(10^{10})}}}},$$

$$c_n=\left(0,999+\frac{1}{n}\right)^{n+3},\qquad d_n=\left(1,00001-\frac{1}{n}\right)^{n+7(-1)^n}.$$

56. Rozstrzygnąć, czy ciąg zdefiniowany poniższym wzorem jest zbieżny:

$$a_n=\sum_{k=n+2}^{2n+7}\frac{1}{k},\qquad b_n=\sum_{n+1}^{n^2}\frac{1}{k}.$$

57. Załóżmy, że liczby $a,b,c\in\mathbb{R}$ mają tę własność, że dla każdego $n\in\mathbb{N}$ istnieje trójkąt o bokach długości a^n, b^n, c^n. Wykazać, że wśród liczb a, b, c przynajmniej dwie są sobie równe.

58. Obliczyć granice następujących ciągów:

$$a_n=\frac{n^2}{7^{\sqrt{n}}},\qquad b_n=\frac{3^{\sqrt{n}}}{2^n}.$$

59. Znaleźć granicę ciągu

$$a_n=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\sqrt{2n+1}\,.$$

60. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n+\sqrt{n+2012}}-\sqrt{n+\sqrt{n+2010}}\right).$$

61. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n+2012}}-\sqrt{n+\sqrt{n+2010}}}{\sqrt[3]{n^{3/2}+2012}-\sqrt[3]{n^{3/2}+2010}}\,.$$

62. Niech, dla wszystkich k naturalnych,

$$s_k = \sum_{n=k}^{2k-1} \frac{n}{2^n}\,.$$

Wykazać, że

$$s_k = \frac{(2k+2)2^k - 4k - 2}{2^{2k}} \qquad \text{dla } k \in \mathbb{N}$$

i obliczyć granicę ciągu (s_k).

63. Niech, dla wszystkich k naturalnych,

$$s_k = \sum_{n=0}^{k-1} n \left(\frac{4}{3}\right)^n\,.$$

Wykazać, że

$$s_k = 12 + (3k-12)\left(\frac{4}{3}\right)^k \qquad \text{dla } k \in \mathbb{N}$$

i obliczyć granicę ciągu $c_k = s_k/2^{k/2}$.

64. Niech a_n będzie ciągiem zadanym rekurencyjnie: a_1 jest pewną liczbą rzeczywistą, a ponadto

$$a_{n+1} = a_n^2 - 1 \qquad \text{dla } n = 1, 2, \ldots$$

Udowodnić, że gdy $|a_1| \le (1+\sqrt{5})/2$, to ciąg (a_n) jest ograniczony, a gdy $|a_1| > (1+\sqrt{5})/2$, to ciąg (a_n) jest rozbieżny (do $+\infty$.)

65. Udowodnić, że ciąg

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 3 - \frac{2}{3}\,, \quad \ldots, a_n = 3 - \frac{2}{a_{n-1}}\,, \quad \ldots$$

jest zbieżny i znaleźć jego granicę.

66. Dany jest ciąg $(a_n)_{n\ge1}$ taki, że $a_1 = a_2 = 1$ oraz $2a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ dla $n = 1, 2, 3 \ldots$. Wykazać, że

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^n\right].$$

Obliczyć $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

67. Niech $(F_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem zdefiniowanym tak: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ dla $n \geq 1$. Udowodnić, że dla $m \geq 1$ i $n \geq 2$ prawdziwa jest równość

$$F_{m+n} = F_m F_{n-1} + F_{m+1} F_n \,.$$

68. Dla ciągu $(F_n)_{n\geq 1}$ z poprzedniego zadania udowodnić, że dla $n \geq 2$ prawdziwa jest równość

$$F_{2n} = (F_{n+1})^2 - (F_{n-1})^2 \,.$$

69. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} \,.$$

70. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3n^2 + 20n + 5)}{\ln(n^9 - 3n + 12)} \,.$$

71. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - \sqrt[n]{\ln n}) \,.$$

72. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \ln(n^2 + 1) - 2n(\ln n) \sqrt[n]{\ln n} \right) \,.$$

73. Niech b będzie liczbą rzeczywistą różną od zera, zaś c – dowolną liczbą rzeczywistą. Wyznaczyć (lub wykazać, że nie istnieje) granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot \frac{1}{n} \cdot c}}{2 \cdot \frac{1}{n}}$$

74. Udowodnić, że jeżeli dla ciągu (a_n) liczb dodatnich istnieje skończona granica

$$\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^n \,,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

75. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}} \right)$$

76. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}) \ln \frac{2n+1}{2n}.$$

77. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{b_n},$$

gdzie $b_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})^{-2}$.

78. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_2 = 1, \qquad a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \sqrt{a_{n-2}} \quad \text{dla } n \geq 3.$$

Wykazać, że ciąg (a_n) jest rosnący i ograniczony, a następnie znaleźć jego granicę.

79. Ciąg (x_n) jest określony rekurencyjnie:

$$x_1 = 2, \qquad x_{n+1} = f(f(x_n)) \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots,$$

gdzie $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Wykazać, że x_n jest monotoniczny i ograniczony i obliczyć jego granicę.

80. Ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ma wyrazy dodatnie i jest ograniczony. Wykazać, że jeśli ciąg (c_n) ma granicę równą 0, to ciąg dany wzorem

$$b_n := c_n \sqrt[n]{\ln(1+a_1)\cdot\ln(1+a_2)\cdot\ldots\cdot\ln(1+a_n)}$$

też ma granicę równą 0.

Wskazówka. Wykorzystać nierówność $\ln(1+x) < x$ dla $x > 0$.

81. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt[n]{n}}{2}\right)^{\frac{n}{\ln n}}.$$

82. Wykazać, że jeśli ciąg liczb rzeczywistych (a_n) spełnia jednocześnie dwa warunki:

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0\,,$$

a ponadto

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n,m>N} \quad |a_{3m}-a_{3n}| \leq \varepsilon\,,$$

to (a_n) jest zbieżny. Podać przykłady świadczące o tym, że żaden z powyższych warunków z osobna nie jest warunkiem wystarczającym zbieżności ciągu (a_n).

83. Wykazać, że jeśli

$$A = \{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

jest zbiorem wyrazów zbieżnego ciągu liczb rzeczywistych (a_n), to $\sup A \in A$ lub $\inf A \in A$.

Podać przykład takiego ograniczonego ciągu rozbieżnego (b_n), dla którego ani $\sup B$, ani $\inf B$ nie są elementami zbioru B wszystkich wyrazów ciągu (b_n).

84. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n+2)}.$$

Wskazówka: przydatne mogą być (ale nie muszą) różne własności logarytmu naturalnego.

85. Załóżmy, że ciąg (a_{n^2}) jest zbieżny do granicy skończonej, ponadto wyrazy ciągu (a_n) spełniają warunek

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}} \text{ takie, że } \forall_{m>N}\ \exists_{n>N} \text{ takie, że } |a_m - a_{n^2}| < \varepsilon.$$

Czy wynika stąd zbieżność ciągu (a_n)?

3 Szeregi liczbowe i okolice

Uwaga: wszędzie w tym podrozdziale symbol $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą (tzn. *entier*) liczby rzeczywistej x, inaczej *podłogę* x, a symbol $\lceil x \rceil$ – tzw. *sufit* liczby x, tzn. $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ dla $x \in \mathbb{Z}$ oraz $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

86. Znaleźć sumę szeregu lub wykazać, że szereg ten sumy nie posiada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} - \frac{n+2}{2n+3} \right)$$

87. Zbadać zbieżność poniższych szeregów:

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n\sqrt[n]{2n+6}}{n^4 + 3(-1)^n n^2 + 11n}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^{\sqrt[n]{3^n+4}}}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{n\sqrt[n]{3^n + n^5 5^n}}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(17^{17n} + 1000n^{177})}$$

88. W zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ zbadać zbieżność, bezwzględną zbieżność, [tylko] warunkową zbieżność szeregów:

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n + \frac{2000015}{n}}$$

- $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^n}{n + \ln(n^2+1)}$$

89. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a^n}{\ln(n!)}$$

90. Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}, \qquad \text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

91. Zbadać zbieżność szeregów

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n^{\ln n}}, \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(1-\sqrt[n]{2})}.$$

92. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}.$$

93. Znaleźć wszystkie wartości parametru $a > 0$, dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\varepsilon_n}, \qquad \text{gdzie} \quad \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1},$$

jest zbieżny.

94. Znaleźć wszystkie wartości parametru $p \in \mathbb{R}$, dla których szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right)^p$$

jest zbieżny.

95. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie dowolnym szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Czy szeregi:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{a_n^5}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin a_n$$

są zawsze zbieżne? Uzasadnić odpowiedź, podając dowód lub kontrprzykład.

96. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie dowolnym szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{\ln n}(n^{a_n} - 1)$$

jest zbieżny? Uzasadnić odpowiedź.

97. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^5(2n^7 + 13) + 10\sin(n)}{n \ln^6(n^{\frac{7}{8}} + 2\sqrt{n} - 1)\ln(\ln(n + (-1)^n))}.$$

98. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\cos\sqrt[3]{n^3 + \sqrt{n} + 7} - \cos\sqrt[3]{n^3 - 2\sqrt{n} + 3}\right).$$

99. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\exp n}{\exp(n\sqrt[n]{n})\ln^2 n}.$$

100. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)!(n+1)^{n-1}}{n^{2n}}.$$

101. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{\left\lfloor \frac{n^3+n+1}{3n^2-1} \right\rfloor} \frac{\ln n}{n}.$$

102. Niech

$$S_k := \sum_{n=2}^{k} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{\ln n}.$$

Czy ciąg $S_{(2k)^2}$ jest zbieżny? Czy ciąg S_k jest zbieżny? Obie odpowiedzi proszę uzasadnić.

103. Dany jest ciąg (a_n) o wyrazach zespolonych taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Niech $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie bijekcją, o której wiadomo, że istnieje takie $M \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n \in N$ zachodzi nierówność $|\sigma(n) - n| \leq M$. Wykazać, że wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

jest zbieżny.

104. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt[3]{n^3+8n+1}\right)\left(\ln(n+1)-\ln n\right).$$

105. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=13}^{\infty}(-1)^{\lfloor\frac{n}{13}\rfloor}\frac{\ln n}{n\ln(\ln n)}.$$

106. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n^2}{\sqrt{n+1}}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$$

jest zbieżny? Uzasadnić odpowiedź.

107. Dany jest zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Czy wynika stąd, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n/\sqrt{n}$ jest a) zbieżny, b) bezwzględnie zbieżny? Odpowiedź uzasadnić, podając dowód lub kontrprzykład.

108. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n a_n$, gdzie wszystkie $a_n>0$, jest zbieżny. Czy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$? Odpowiedź uzasadnić, podając dowód lub kontrprzykład.

109. Zbadać zbieżność szeregów

a) $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots$

b) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\ldots$

110. Wykazać, że iloczyn Cauchy'ego szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\qquad \text{i}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

jest rozbieżny. Czy odpowiedź zmieni się, gdy pierwszy szereg zamienimy na $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-5/4}$?

111. Niech (a_n) będzie takim ciągiem liczb zespolonych, że iloczyn Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$.

112. Obliczyć sumy następujących szeregów

- $$\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-\frac{9}{4\cdot 5}+\cdots$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)}$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}$$

- $$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}+\cdots$$

- $$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}-\frac{1}{7\cdot 8\cdot 9}+\cdots$$

- $$\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 7\cdot 10}+\frac{1}{7\cdot 10\cdot 13}+\cdots$$

- $$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\cdots$$

- $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n!}$$

113. Wykazać tożsamość

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n^3-n)3^n} = -\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n}.$$

114. Zbadać zbieżność szeregu w zależności od parametru $\alpha > 0$:

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{b}-1\right)^{\alpha}, \quad \text{gdzie } b>1 \text{ jest ustaloną liczbą,}$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\alpha},$$

- $$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^{\alpha}},$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\alpha}.$$

  Wskazówka.
  $$1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

115. Zbadać, w zależności od wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n^{\alpha}2^n}{n^{\alpha}3^n+2^n}.$$

116. Zbadać zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n-\ln n},$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\Big(1+\ln\sqrt[n]{n}\Big),$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{1}{n+\sqrt{n}},$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+na_n)\ln n},\quad \text{gdzie } a_n \text{ to reszta z dzielenia liczby } n \text{ przez } 3.$$

117. Zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+(-1)^{n(n+1)/2}}.$$

118. Udowodnić tożsamość
$$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=-1.$$

119. Udowodnić, że liczby zespolone $z, w \in \mathbb{C}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi następujący warunek:

($*$) $\exp z=\exp w$ i dla pewnego $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ spełniona jest równość $\exp(\alpha\cdot z)=\exp(\alpha\cdot w)$.

120 (*). Wykazać, że każda liczba zespolona $w \in \mathbb{C}$ należy do zbioru wartości funkcji $\cos\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$.

121. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach zespolonych jest zbieżny. Udowodnić, że istnieje ciąg nieograniczony $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ liczb dodatnich taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ też jest zbieżny.

4 Granica i ciągłość funkcji

Uwaga: w rozwiązaniach zadań o granicach proszę posługiwać się wyłącznie faktami znanymi z wykładu.

122. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}.$$

123. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x \cdot \sin(\sin x)}.$$

124. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \sin\left(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+2}\right).$$

125. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\sqrt{x}}.$$

126. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^{1/\pi}}{1-x^{1/e}}.$$

127. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2+x+1}{2x+1}\right)^{1/(x^2-1)}.$$

128. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{x^2}.$$

129. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}.$$

130. Obliczyć

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x}.$$

Wskazówka: $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 - \ldots$; ponadto wiadomo (z wykładów), że gdy $n\,a_n \to 0$, wtedy $(1+a_n)^n \to 1$.

131. Obliczyć

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$$

dla $m, n \in \mathbb{N}$.

132. Dla jakich parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$ funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + a^2} & \textbf{dla} \quad |x| > 1, \\ ax^2 + bx + c & \textbf{dla} \quad |x| \leq 1 \end{cases}$$

jest ciągła na $\mathbb{R}$?

133. Niech $P(x)$ i $Q(x)$ będą wielomianami takimi, że $P(0) = Q(0) = 0$. Jakie możliwe wartości (włączając $+\infty$ i $-\infty$) może przyjąć wyrażenie

$$\lim_{x \to 0} \frac{P(x)}{Q(x)} \, ?$$

Scharakteryzować te pary (P, Q), dla których powyższa granica istnieje i jest różna od 0 i $\pm\infty$.

134. Niech $f(x) = \ln(1 - x^2)$, $|x| < 1$. Naszkicować wykres tej funkcji i scharakteryzować wszystkie wielomiany Q, dla których granica

$$\lim_{x \to 0} \frac{Q(x)}{f(x)}$$

istnieje i jest liczbą rzeczywistą.

135. Podać przykład funkcji $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która ma granicę tylko w punktach 0 i 1.

136. Wyznaczyć stałe rzeczywiste a, c tak, by funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \exp(\operatorname{tg} x) / \big(1 + \exp(\operatorname{tg} x)\big) & \textbf{dla } |x| < \pi/2, \\ \exp(c \cdot x) - 2 & \textbf{dla } |x| \geq \pi/2 \end{cases}$$

była ciągła na prostej $\mathbb{R}$.

137. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

i niech $g(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$. Zbadać ciągłość funkcji $f \circ g$ oraz $g \circ f$ na całej prostej rzeczywistej.

138. Wyznaczyć stałe dodatnie A, B, C, dla których istnieje funkcja ciągła $f \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ taka, że

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A\sqrt{x} - B}{x^2 - 4} \qquad \textbf{dla } x > 2, \\ f(x) &= \frac{\ln(Cx)}{x - 2} \qquad \textbf{dla } 0 < x < 2. \end{aligned}$$

139. Dla jakich stałych rzeczywistych A funkcja

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \cos(A\,x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

jest ciągła na $\mathbb{R}$?

140. Zbadać, czy istnieje taka liczba $a \in \mathbb{R}$, dla której funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x(\cos x - a)}{\sin x}, & x \neq 0,\ x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

jest ciągła na przedziale $(-\pi, \pi)$.

141. Funkcja f jest ciągła na przedziale $[1/(2\sqrt{2}), 2\sqrt{2}]$ i spełnia warunek

$$f(2\sqrt{2}) - f\big(1/(2\sqrt{2})\big) = 3.$$

Wykazać, że dla pewnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $f(2x) - f(x) = 1$.

142. Wykazać, że jeśli f jest funkcją ciągłą na przedziale $[0,\,2]$, to istnieją punkty x_1 i x_2 w $[0,\,2]$ takie, że $x_2 - x_1 = 1$ oraz

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{f(2) - f(0)}{2}$$

.

143. Funkcja $f\colon [-1,\,1] \to (0,\,1]$ jest ciągła. Udowodnić, że równanie $f(x) = x^4$ posiada co najmniej dwa rozwiązania.

144. Dobrać parametry $a,\, b \in \mathbb{R}$ tak, by funkcja g,

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{a}{x}, & x \neq 0 \\ b\,, & x = 0 \end{cases}$$

była ciągła na całym $\mathbb{R}$.

145. Czy dla każdej liczby rzeczywistej $b < 0$ można dobrać liczby rzeczywiste a i c takie, że funkcja f,

$$f(x) = \begin{cases} |1 + x|^{b/x}, & x < 0 \\ c\,, & x = 0 \\ \dfrac{\sin^2(ax)}{\ln(1 + x^2)}\,, & x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła w całej swojej dziedzinie $\mathbb{R}$?

146. W zależności od parametrów $\alpha \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ zbadać ciągłość funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-5)^n\left(1+e^{-1/(x-5)}\right)}, & x < 5 \\ \alpha, & x = 5 \\ \dfrac{\ln\left((x-4)^{\alpha+1}\right)+5-x}{x-5}, & x > 5\,. \end{cases}$$

147. Funkcja f jest ciągła na $[0,1]$ i spełnia zależność

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x+1/3)+f(x+2/3)}{x} = 1.$$

Udowodnić, że istnieje punkt $x_0 \in [0,1]$ taki, że $f(x_0) = 0$.

148. Bez pomocy kalkulatora wyznaczyć rzeczywisty pierwiastek wielomianu $x^3 + x^2 + 2x + 1$ z dokładnością co najmniej $1/16$.

149. Funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,\, b]$. Określamy

$$g(x) = \sup_{t\in[a,\,x]} f(t)\,.$$

Dowieść, że g jest ciągła na przedziale $[a,\, b]$.

150. Funkcja f jest ciągła na $(-1,\, 1]$. Dla $x \in (-1,\, 1]$ określamy

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x^n).$$

Udowodnić, że g jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy $f(0) = f(1)$.

151. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\,.$$

152. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{k\to\infty} \left(\cos(n!\pi x)\right)^{2k} \right) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

5 Rachunek różniczkowy

153. Funkcja różniczkowalna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie $f(x) = f'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Ponadto $f(0) = a$. Wykazać, że $f(x) = ae^x$.

154. Wielomian $W(x)$ ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Wykazać, że dla dowolnej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$ wielomian $\alpha W(x) + W'(x)$ ma co najmniej $n-1$ różnych pierwiastków rzeczywistych.

155. Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x}\exp(-1/|x|) & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

jest w punkcie $x_0 = 0$ ciągła? różniczkowalna? Odpowiedzi proszę uzasadnić. Obliczyć kres górny i kres dolny f na zbiorze $\mathbb{R}$.

156. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1}\sqrt[5]{x^2-2x+1}\,.$$

157. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \sqrt[5]{x-2}\sqrt[9]{x-7}\,.$$

158. Znaleźć kresy zbioru

$$A = \{ \sqrt[n^2]{n^2+2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

159. Niech $f(x) = \sin \ln x$ dla $x > 0$. Proszę wyznaczyć:

(a) wszystkie $a > 0$, dla których f jest jednostajnie ciągła na $(0, a]$;

(b) wszystkie $b > 0$, dla których f jest jednostajnie ciągła na $[b, \infty)$,

(c) wszystkie $c > 0$, dla których f jest lipschitzowska na $[c, \infty)$,

(d) wszystkie $d > 0$, dla których f jest lipschitzowska na $(0, d]$.

160. Znaleźć ekstrema i zbadać wypukłość funkcji $f : (0, e^2) \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \frac{-2}{\ln(x) - 2}\,.$$

Czy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że funkcja $g(x) = (f(x))^n$ jest wypukła na przedziale $(0, e^2)$? Odpowiedź uzasadnić.

161. Niech $f_n(x) = \sqrt[n]{\exp(x)} : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Czy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że f_n jest wklęsła na przedziale $[0, 1]$? Odpowiedź uzasadnić.

162. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła, wypukła i ściśle rosnąca oraz $f(a) = c$ i $f(b) = d$. Wykazać, że funkcja odwrotna $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ jest wklęsła.

163. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Wiadomo, że istnieje punkt $x \in (a, b)$ taki, że dla każdego $y \in [a, b]$ zachodzi $f(x) \geq f(y)$. Udowodnić, że f jest funkcją stałą.

164. Niech $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi i wypukłymi. Wykazać, że funkcja $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

też jest wypukła.

165. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą i ciągłą. Wykazać, że funkcja $m : [a, b] \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$m(x) = \max\{f(y) : y \in [a, x]\}$$

też jest wypukła.

166. Znaleźć wszystkie pary liczb rzeczywistych a i b, dla których funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a(x+1) + \sin(bx) & \text{dla } x \geq 0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{x \sin x} & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

jest różniczkowalna na przedziale $(-\pi, \infty)$.

167. Wyznaczyć kresy zbioru wartości funkcji $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

168. Wykazać, że równanie

$$(x - \sqrt{2}) \ln(x - \sqrt{2}) + (x + \sqrt{2}) \ln(x + \sqrt{2}) = 2x$$

ma co najwyżej dwa rozwiązania w $\mathbb{R}$.

169. Znaleźć minimum objętości stożków opisanych na kuli o promieniu r.

170. Spośród wszystkich deltoidów o obwodzie l wskazać ten o największym polu.

171. Wśród wszystkich trójkątów o obwodzie równym 3 znaleźć trójkąt o największym polu.

172. Obliczyć kres dolny na przedziale $(0, \infty)$ funkcji

$$f(x) = \ln(e^x - 1) + \frac{2}{x} - x\,.$$

173. Niech $f(x) = \big(\operatorname{tg} x\big)^{\sin 2x}$ dla $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Wykazać, że f osiąga swój kres dolny na przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$ w dokładnie jednym punkcie $u \in (0, \frac{\pi}{2})$ oraz osiąga swój kres górny w dokładnie jednym punkcie v tego przedziału. Obliczyć $u + v$.

174. Dana jest funkcja $f(x) = e^{-|2x+1|}(x^2 + 2x + 3)$.

(a) wyznaczyć przedziały monotoniczności f;

(b) wskazać przedziały, na których f jest wypukła;

(c) rozstrzygnąć, czy f jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

175. Wykorzystując wzór Taylora dla $n = 3$, wyznaczyć przybliżoną wartość $\sqrt[3]{e}$. Oszacować błąd przybliżenia.

176. Niech

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^5 + 3\sqrt[3]{x^8}}{x \cdot \sqrt[6]{x}} \qquad \text{dla } x > 0.$$

Dowieść, że jeśli $a, b, c > 0$ i $a + b + c = 3$, to $f(a) + f(b) + f(c) \geq 12$.
Wskazówka. Sprawdzić, na jakich przedziałach f jest wypukła.

177. Wykazać, że

$$1 + \exp\frac{a+b+c+d}{4} \leq \sqrt[4]{\left(1+e^a\right)\cdot\left(1+e^b\right)\cdot\left(1+e^c\right)\cdot\left(1+e^d\right)}$$

dla wszystkich $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

178. Wykazać, że dla $|x| < 1$ błąd przybliżenia

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

nie przekracza $\frac{1}{720}$.

179. Udowodnić, że dla wszystkich $x > 0$ spełniona jest nierówność

$$\ln(1+x) > \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x}.$$

180. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich x i y zachodzi nierówność

$$x^x \cdot y^y \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y}.$$

181. Niech $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Załóżmy, że $h'(0)$ istnieje i jest liczbą większą od 1, a $h(0) \geq 0$. Wykazać, że $h(x) > x$ dla $x > 0$.

182. Zbadać przebieg zmienności funkcji $f(x) = (2+x)\exp(1/x)$.

183. Wykazać, że dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzi nierówność

$$\frac{2\ln(\cos x)}{x^2} < \frac{x^2}{12} - 1\,.$$

184. Wykazać, że jeśli $e < y < x$, to

$$x^y < y^x.$$

185. Niech $f(x) = x^{-1}e^x$ dla $x > 0$ i niech

$$M(t) = \sup_{x\in[t,t+1]} f(x), \qquad t > 0.$$

Wyznaczyć kres dolny funkcji $M\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

186. Obliczyć n-tą pochodną funkcji $x^n e^{-x}$ w zerze.

187. Znaleźć rozwinięcie Taylora wokół $x = 2$ funkcji $f(x) = x^5 + x^4 + 2x + 1$.

188. Znaleźć piąty wyraz rozwinięcia Taylora funkcji $\sin(\operatorname{tg} x)$ wokół $x = 0$.

189. Wyznaczyć trzeci wyraz rozwinięcia Taylora wokół $x = 0$ funkcji

$$f(x) = \frac{(1+x)^4}{(1+2x)^3(1-2x)^2}.$$

190. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x)\cdot\exp(-1/x^2) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Czy $f''(0)$ istnieje? Czy $x_0 = 0$ jest punktem przegięcia f? Odpowiedzi proszę uzasadnić.

191. Posługując się tylko wzorem Taylora, obliczyć $\ln 3 - \ln 2$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

192. Wyznaczyć wszystkie pary liczb $a, b \in \mathbb{R}$, dla których granica

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - (a + b\cos x)\sin x}{x^5}$$

jest skończona.

193. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2}\big(\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{n+1}\,) - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{n}\,\big).$$

194. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

195. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}.$$

196. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x}{\ln(1+\frac{1}{x})}.$$

197. Obliczyć granicę ciągu

$$a_n = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

198. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{\sin\left(\dfrac{1}{x+\varphi(x)}\right)} - \frac{1}{\sin\left(\dfrac{1}{x+\psi(x)}\right)} \right],$$

gdzie

$$\varphi(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \quad \psi(x) = \sqrt[x]{x} \qquad \text{dla } x>0.$$

Wskazówka: wykorzystać twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej dla funkcji $1/\sin(1/x)$.

199. Udowodnić, że jeśli funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełnia warunek

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = g \in \mathbb{R},$$

to f jest jednostajnie ciągła na całej prostej $\mathbb{R}$.

Wskazówka. Czy f spełnia warunek Lipschitza na przedziale $[a,\infty)$, gdy liczba a jest dostatecznie duża?

200. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\sin x \operatorname{tg}(x\sin x)} - \frac{1}{x^2\sin^2 x} \right).$$

201. Niech $f(x) = 2 - 2\cos x - x\cdot\sin(\sin x)$ i niech $a_n = f(\frac{1}{n})$ dla $n\in\mathbb{N}$. Wyznaczyć wszystkie wykładniki $w>0$, dla których szereg $\sum a_n^w$ jest zbieżny.

202. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x) - x}{\operatorname{tg}(2x) - 2\ln(1+x) - x^2}.$$

203. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(1-\cos(x)) - \operatorname{tg}^2(\sin(x))}{(\cos(x)-1)^2}.$$

204. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin(\ln(\operatorname{arc\,tg}(\exp(x)-1) - \sin(x)+1)))}{(\arcsin(x) - \sin(x))^{2/3}}.$$

205. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1-\sin(x)} - \cos(x) - \operatorname{tg}(x) - \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}^2(x)}{\operatorname{arc\,tg}^3(\sin x)}.$$

6 Zbieżność jednostajna i szeregi potęgowe

206. Wykazać, że jeśli a_n jest ciągiem monotonicznie zbieżnym do a, zaś $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą i monotoniczną, to ciąg funkcji

$$f_n(x) := f(x + a_n)$$

jest zbieżny jednostajnie na każdym przedziale $[-M, M] \subset \mathbb{R}$.

207. Podać przykład ciągu funkcji $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiego, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie, ale szereg norm $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ jest rozbieżny.

208. Wykazać, że granica punktowa ciągu funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą.

209. Zbadać zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{(n + x^2)\ln^2 n}.$$

210. Zbadać zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{x+n}}$$

na przedziale $[0, +\infty)$.

211. Znaleźć zbiór $X \subset \mathbb{R}$ punktów zbieżności szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\tfrac{n}{n^2+1}) \sqrt{\cos(\tfrac{2n+3}{5n^2-7})} \left(\tfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^n .$$

212. Znaleźć zbiór $X \subset \mathbb{R}$ punktów zbieżności szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} x \sin\left(\frac{x}{1 + n^2x^2}\right).$$

Czy szereg ten jest zbieżny jednostajnie na zbiorze X? Odpowiedź proszę uzasadnić.

213. Niech $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcyjnym, zbieżnym jednostajnie na $\mathbb{R}$ do funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dla $n \in \mathbb{N}$ kładziemy

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \exp(-(f_n(x))^2)\,, \qquad & g(x) &= \exp(-(f(x))^2)\,, \\ h_n(x) &= (f_n(x))^2\,, \qquad & h(x) &= (f(x))^2\,. \end{aligned}$$

Czy ciag g_n zbiega jednostajnie na $\mathbb{R}$ do funkcji g? A czy ciag h_n zbiega jednostajnie na $\mathbb{R}$ do funkcji h? Obie odpowiedzi proszę uzasadnić.

214. Zbadać, czy suma szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{nx} \cos \frac{x}{n}$$

jest ciągła na zbiorze $(0, \pi)$.

215. Zbadać zbieżność jednostajną i punktową ciągu

$$f_n(x) = n^2 \frac{1 - \cos\left(\frac{x}{n}\right)}{x}$$

na zbiorach $(0, +\infty)$ i $(0, a]$, gdzie $a > 0$.

216. Zbadać zbieżność jednostajną i punktową ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \exp\left(x + \frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right) + \cos\left(\frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}\right)$$

na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$.

217. Zbadać zbieżność jednostajną i punktową ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = n^3 x \exp(-nx^2), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

na odcinku $[0, 1]$.

218. Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{x}{\exp(2x)}$. Definiujemy ciąg funkcyjny (f_n) przez wielokrotne składanie funkcji f:

$$f_n(x) := f^{\circ n}(x) = f \circ f \circ \ldots \circ f(x).$$

Zbadać zbieżność jednostajną tego ciągu na zbiorze $x \geq 0$.

219. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{x^5 + n^5}$$

jest dobrze określona i klasy C^1 na $[0, +\infty)$.

220. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 x)$$

jest dobrze określona i klasy C^1 na $(0, +\infty)$.

221. Funkcja analityczna $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (szereg ma promień zbieżności $R > 0$) spełnia w przedziale $(-R, R)$ równanie

$$f'(x) = x^2 f(x)$$

i ponadto $f(0) = \pi$. Wyznaczyć a_6.

222. Wyznaczyć promienie zbieżności następujących szeregów potęgowych:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot 3^{n^2} \cdot 4^{n^3}}{n + n^2 + n^3} x^{2n^3},$$

$$\text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + (-1)^n 2)^{2n}}{n} x^{2n+(-1)^n},$$

$$\text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (5n + (-1)^n)^n \, x^{2n},$$

$$\text{d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 8^n \sqrt{n} x^{n+1}.$$

223. Szereg potęgowy $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$ ma skończony promień zbieżności $R > 0$. Proszę wyznaczyć promień zbieżności szeregu $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^{n^2}$.

224. Czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1 + (x - n)^2)}$$

jest zbieżny jednostajnie na $(0, +\infty)$? Odpowiedź proszę uzasadnić.

225. Szereg potęgowy $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$ ma skończony promień zbieżności $R > 0$. Proszę wyznaczyć promień zbieżności szeregu $\sum_{n=3}^{\infty} 3^n a_n x^{n^3}$.

226. Rozwinąć w szereg Taylora–Maclaurina funkcję $f(x) = \sin(x^2) \cdot \cos(x^2)$.

227. Rozwinąć szereg Taylora–Maclaurina funkcję

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot \operatorname{arc\,tg} x^2.$$

Obliczyć promień zbieżności tego szeregu.

228. Zbadać zbieżność jednostajną i niemal jednostajną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na przedziale $(0, 1)$, gdzie

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dla } x \le \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{dla } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

229. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}, \qquad x \in (-1, 1)$$

spełnia tożsamość

$$xf(x) = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x), \qquad x \in (-1, 1)\,.$$

Wskazówka. $n/(n+1) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

230. Czy suma szeregu

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} - \left(1 + \frac{x}{n}\right) \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$$

jest funkcją dobrze określoną i różniczkowalną na $(0, +\infty)$? Odpowiedzi proszę uzasadnić.

231. Udowodnić, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\sin x|^{\sqrt{n}}$ jest ciągła na $(-1, 1)$. Zbadać jej różniczkowalność na tym przedziale.

232. Załóżmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{arc\,tg} nx, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

233. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\operatorname{arc\,tg} nx - \frac{\pi}{2}\right), \qquad x > 0.$$

234. Wykazać, że funkcja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n^2}\,, \qquad -3 < x < 3,$$

jest różniczkowalna i wyrazić jej pochodną jawnym, prostym wzorem.

235. Obliczyć sumę szeregu $1/2 - 1/5 + 1/8 - 1/11 + \cdots$.
Wskazówka. Rozważyć funkcję $F(x) = x^2/2 - x^5/5 + \cdots$.

236. Załóżmy, że $f \in C([0, \infty))$ nie jest funkcją stałą. Udowodnić, że rodzina $f_n(t) := f(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, nie jest równociągła na $[0, 1]$.

237. Udowodnić, że

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{n}x}{1+n^2x^2}=\frac{\pi^3}{12}\,.$$

238. Dla $x\in\mathbb{R}$ i $n\in\mathbb{N}$ położmy $f_n(x):=x^2+n^{-1}\sin nx$. Udowodnić, że ciąg f_n jest zbieżny jednostajnie na całej prostej $\mathbb{R}$, ale nie jest rodziną równociągłą na $\mathbb{R}$, tzn. nie jest prawdą, że dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje $\delta>0$ takie, że nierówność $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$ zachodzi dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$ i wszystkich $x,y\in\mathbb{R}$, $|x-y|<\delta$.

239 (z gwiazdką, tylko dla zainteresowanych). Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest klasy C^1 i okresowa z okresem $T=1$. Ponadto $f(0)=0$ i $|f'|\le 1$ na całej prostej $\mathbb{R}$. Dla $n\in\mathbb{N}$ kładziemy

$$f_n(x)=\frac{f(2^nx)}{\left(\sqrt{2}\right)^n}\qquad\text{oraz}\qquad F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)\,.$$

1. Niech $k,n\in\mathbb{N}$, $\theta\in(0,1)$. Położmy $x=\frac{k}{2^n}$ oraz $y=x+\frac{\theta}{2^{n+1}}$. Wykazać, że istnieje stała C_1, niezależna od k,n i θ, taka że
$$|F(x)-F(y)|\le C_1 2^{-n/2}\,.$$
2. Wywnioskować z poprzedniego punktu, że F spełnia *warunek Höldera z wykładnikiem* $\frac{1}{2}$, tzn. istnieje taka stała C_2, że
$$|F(x)-F(y)|\le C_2|x-y|^{1/2}\qquad\text{dla wszystkich } x,y\in\mathbb{R}.$$
3. Zbadać różniczkowalność F.

240. Sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4n+3}$$

przedstawić wyraźnym, konkretnym wzorem jako funkcję zmiennej x. Na jakim przedziale słuszny jest otrzymany wzór?

7 Rachunek całkowy

241. Rozłożyć na ułamki proste funkcję wymierną

$$f(x)=\frac{x^3+4x^2-2x+6}{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}.$$

242. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int(2x^3+x)\left(\operatorname{arc\,tg}x\right)^2\,dx.$$

243. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \exp(2x)\cos^3(x)\,dx.$$

244. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}\,dx$$

245. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg}\, x}{(1+\sin^2 x)\cos^2 x}\,dx$$

246. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = x^2\sqrt{4-x^2}$.

247. Funkcja $f(x)$ dana jest wzorem

$$f(x) = \int_x^{\sqrt{x^2+1}} \sin(t^2)\,dt.$$

Obliczyć $f'(x)$.

248. Znaleźć kres dolny i górny funkcji

$$F(x) = \int_0^x \frac{5t+3}{t^3-7t^2+16t-12}\,dt$$

na przedziale $[-1,1]$.

249. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin x}\,dx}.$$

250. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{k}{n^2}.$$

251. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{2n^2+kn-k^2}}{n^2}.$$

252. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\frac{(n+1)^{n+1}(n+2)^{n+2}\cdot\ldots\cdot(2n)^{2n}}{n^{n+1}n^{n+2}\cdot\ldots\cdot n^{2n}}}.$$

253. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^5}{(n^2+k^2)^3}\,.$$

254. Skonstruować przykład ciągu funkcji ciągłych $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ takiego, że $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ dla każdego $x\in[0,1]$, ale
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=+\infty.$$

255. Wykazać, że
$$\int_0^2 e^{x^2-x}\,dx$$
należy do przedziału $[2e^{-1/4},2e^2]$.

256. Wykazać, że dla $n=3,4,5,\ldots$ prawdziwa jest równość
$$\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx=\frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}x\,dx.$$

257. Niech f będzie funkcją dodatnią, ciągłą i rosnącą na przedziale $[a,b]$ i niech $a'=f(a), b'=f(b)$. Wykazać, że
$$\int_a^b f(x)dx+\int_{a'}^{b'} f^{-1}(y)dy=bb'-aa',$$
gdzie f^{-1} oznacza funkcję odwrotną do f.
Wskazówka: Wykorzystać geometryczną interpretację całek.

258. Niech $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o wartościach dodatnich. Wykazać, że dla każdego $x>0$ prawdziwa jest nierówność
$$\int_0^x t^2f(t)\,dt\cdot\int_0^x f(t)\,dt\geq\left(\int_0^x tf(t)\,dt\right)^2.$$
Wskazówka: zróżniczkować badane wyrażenie względem x.

259. Niech $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą okresową, o okresie $T=1$ i całce oznaczonej $\int_0^1 f_0(x)\,dx=1$. Dla $n\in\mathbb{N}$ definiujemy
$$f_n(x)=\frac{f_0(5^nx)}{2^n},\qquad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$
$$\text{oraz}\quad F(x)=\int_0^x f(t)\,dt\,.$$
Wykazać, że szereg $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na całej prostej $\mathbb{R}$ i $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt$

260. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x}\,,$$

gdzie F jest funkcją z poprzedniego zadania.

261. Funkcja f, ciągła i nieujemna na przedziale $[a, b]$, ma na tym przedziale kres górny M. Dowieść, że ciąg

$$\left(\int_a^b f(x)^n\, dx\right)^{1/n}$$

ma granicę równą M.

262. Obliczyć całkę funkcji $f(x) = x\exp(-\sqrt{x})$ po maksymalnym przedziale półosi dodatniej, na którym ta funkcja jest wklęsła.

263. Wyznaczyć liczbę dodatnią x, dla której wartość całki

$$\int_0^{\sqrt{x}} \sin\left(2\pi t/(t+2)\right)\, dt$$

jest największa.

264. Wykazać, że jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to

$$n\int_a^b f(x)\left(\int_a^x f(y)dy\right)^{n-1} dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)^n$$

dla każdej liczby naturalnej n.

265. Punkt A znajduje się w środku układu współrzędnych w $\mathbb{R}^2$. Prosta ℓ przechodzi przez A. W chwili $t_0 = 0$ punkt A zaczyna się poruszać po prostej ℓ ze stałą prędkością 1 m/s, a jednocześnie prosta ℓ zaczyna się obracać ze stałą prędkością kątową 1 radiana na sekundę. Obliczyć długość krzywej, jaką punkt A zakreśli, poruszając się od $t_0 = 0$ do $t_1 = 1$ s.

266. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^\pi \frac{\big(\sin x\big)^a}{x^b + \big(\pi - x\big)^c}\, dx\,,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$.

267. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty \frac{x^a\cdot|\sin x|^b}{\exp(x^2)-1}\, dx\,,$$

gdzie (wariant 1) $a, b > 0$, (wariant 2, trudniejszy) $a, b \in \mathbb{R}$.

268. Niech $f \in C((0,1])$ będzie taka, że $\int_0^1 |f(x)|\, dx$ jest zbieżna. Niech $\alpha \in (0,1)$ będzie dowolną liczbą. Wykazać, że

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{r^{1-\alpha}} \int_0^r |f(x)|^\alpha \, dx = 0\,.$$

Wskazówka: Zastosować nierówność Höldera z wykładnikiem $p = 1/\alpha$.

269. Niech $\alpha \in (0,1)$. Obliczyć granicę

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{r|\ln r|^\alpha} \int_0^r |\ln x|^\alpha \exp(-x^2)\, dx\,.$$

Poszczególne kroki w obliczeniach proszę starannie uzasadnić.

Wskazówka: Można zastosować nierówność Höldera z wykładnikiem $p = 1/\alpha$, a następnie spróbować wykorzystać twierdzenie o 3 funkcjach i monotoniczność logarytmu.

270. Niech $f \in C(\mathbb{R})$ i niech $M > 0$. Udowodnić, że ciąg funkcyjny

$$f_n(z) = \frac{n}{2} \int_{z-\frac{1}{n}}^{z+\frac{1}{n}} f(y)\, dy$$

jest zbieżny do f jednostajnie na $[-M, M]$.

271. Załóżmy, że $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza. Wykazać, że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego $k = 1, 2, \ldots$ jest

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx \le \frac{C}{k}\,.$$