Tak! Następnik implikacji jest prawdziwy, bo z założenia $n \in \mathbb{N}$.

③ Tu będzie troszkę trudniej:

Niech $A = \{n \in \mathbb{N} : (\text{jeżeli } m \in \mathbb{N} \text{ i } m > n, \text{ to } m \geq n+1)\}$

$= \{n \in \mathbb{N} : (m \in \mathbb{N} \wedge m > n) \Rightarrow (m \geq n+1)\}$

(·) Czy $1 \in A$?

Dla $n=1$ mamy implikację $(m \in \mathbb{N} \wedge m > 1) \Rightarrow (m \geq 2)$.
Albo poprzednik tej implikacji jest fałszywy (i cała implikacja jest prawdziwa), albo prawdziwy:
$m \in \mathbb{N}$ i $m > 1$.
Wtedy z ② $m-1 \in \mathbb{N}$, a więc z ① $m-1 \geq 1$
$m \geq 2$.
zatem również następnik jest prawdziwy, i prawdziwa jest cała implikacja.

(··) Załóżmy, że, dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, $k \in A$.
Czy $k+1 \in A$?

$k \in A$ oznacza, że

(założenie) $\quad (m \in \mathbb{N} \wedge m > k) \overset{(Z)}{\Rightarrow} (m \geq k+1)$

a $(k+1) \in A$, że

(teza) $\quad (m \in \mathbb{N} \wedge m > k+1) \overset{(T)}{\Rightarrow} (m \geq k+2)$.

Jeżeli fałszywy jest poprzednik implikacji (Z) (dla pewnego m), to fałszywy jest też poprzednik (T) i obie implikacje są prawdziwe.

Załóżmy zatem, że (dla pewnego $m \in \mathbb{N}$) $m > k$;
z (Z) oznacza to, że $m \geq k+1$
Równocześnie $m > k$ oznacza$^{(z\ ①)}$ $m > 1$, więc z ② $m-1 \in \mathbb{N}$.
Jeżeli poprzednik (T) jest fałszywy, to (T) jest prawdziwa; jeżeli zaś jest prawdziwy:

$m > k+1$

to $m-1 > k$, $m-1 \in \mathbb{N}$.
Wiemy, że (Z) zachodzi dla dowolnego m; prawdziwa jest więc implikacja z $m-1$ w miejsce m

$$(m-1 \in \mathbb{N} \wedge m-1 > k) \Rightarrow (m-1 \geq k+1)$$

(a poprzednik tej implikacji, jak sprawdziliśmy, jest prawdziwy). Stąd $m-1 \geq k+1$, czyli

$$m \geq k+2$$

co pokazuje, że następnik (T) jest prawdziwy, a więc cała (T) jest prawdziwa □.

④ Ten punkt udowodnimy nie wprost.
Załóżmy, że $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ i A nie ma elementu najmniejszego.

Zauważmy najpierw, że $1 \notin A$, bo gdyby $1 \in A$, to 1 byłoby elementem najmniejszym w A, (z ① $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n \geq 1$).

Niech $B = \{m \in \mathbb{N} : \forall_{n \in A}\ m < n\}$.

B jest niepusty, bo $1 \in B$.

Załóżmy, że pewne ~~mean~~ $m \in B$, a więc

$$\forall_{n \in A}\ m \leq n$$

Liczby m i n są naturalne, więc z ③ mamy

$$\forall_{n \in A}\ m+1 \leq n. \qquad (*)$$

Gdyby teraz $m+1 \in A$, to $m+1$ byłoby w A elementem najmniejszym; to jest niemożliwe, zatem dla żadnego $n \in A$ w $(*)$ nie ma równości.

To oznacza, że

$$\forall_{n \in A}\ m+1 < n$$

czyli $m+1 \in B$.

O zbiorze B udowodniliśmy zatem, że:

$$\begin{cases} 1 \in B \\ \text{jeżeli } m \in B, \text{ to } m+1 \in B \end{cases}$$

a więc, jak w poprzednich punktach, $B = \mathbb{N}$ – i na A nie ma już miejsca...

(każdy element A jest ograniczeniem górnym zbioru B, a jeżeli $B = \mathbb{N}$, to takiego ograniczenia nie ma – sprzeczność z tym, że $A \neq \emptyset$) $\lightning$.

Twierdzenie (ZASADA INDUKCJI)

Niech W będzie pewną własnością pewnych liczb naturalnych ($W(n)$ jest prawdą, gdy n ma własność W, fałszem, gdy jej nie ma).

Jeżeli ~~1 ma własność~~

(·) potrafimy wykazać, że 1 ma własność W
(baza indukcji)

i, przy założeniu, że
(··) liczba m ma własność W
(założenie indukcyjne)
potrafimy wykazać, że
(···) liczba $m+1$ ma własność W
(teza indukcyjna),

to wszystkie liczby naturalne mają własność W.

Dowód: Dokładnie tak, jak w poprzednim twierdzeniu:

Niech $A = \{ n \in \mathbb{N} : n \text{ ma własność } W \}$

Metoda opisana w twierdzeniu mówi, że

$$\begin{cases} 1 \in A \\ \text{i jeżeli } m \in A, \text{ to } m+1 \in A, \end{cases}$$

zatem $A \in \mathcal{A}$, co oznacza, że $\mathbb{N} \subset A$.
Oczywiście $A \subset \mathbb{N}$, co dowodzi, że $\mathbb{N} = A$.

Twierdzenie (nierówność Bernoulliego)

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \ \forall_{\substack{a\in\mathbb{R}\\ a>-1}} \ (1+a)^n \geq 1+na$$

Jakub Bernoulli (1654–1705)
pierwszy z wielu wybitnych uczonych o tym nazwisku, profesor Uniwersytetu w Bazylei. Twórca podstaw rachunku prawdopodobieństwa, jako pierwszy użył biegunowego układu współrzędnych, jest autorem pojęcia całki...
Jeden z ojców analizy matematycznej.

Definicja potęgi:
Dla $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ mamy ($n\in\mathbb{N}$).
$a^0=1$, $a^{n+1}=a\cdot a^n$,
dodatkowo $0^n=0$.

Dowód: (indukcyjny).

① Czy twierdzenie zachodzi dla $n=1$?
TAK, bo $(1+a)^1 = 1+a \geq 1+1\cdot a$.

② Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla pewnego $n\in\mathbb{N}$:

$$\forall_{\substack{a\in\mathbb{R}\\ a>-1}} \ (1+a)^n \geq 1+na.$$

③ Czy z ② wynika, że twierdzenie zachodzi dla $n+1$, tj

$$\forall_{\substack{a\in\mathbb{R}\\ a>-1}} \ (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a \ ?$$

tu korzystamy z faktu, że jeżeli $a\leq b$ i $c>0$, to $ac\leq bc$. Dowód?

$$(1+a)^{n+1} = \underset{\vee \atop 0}{(1+a)}\underset{\vee \atop 0}{(1+a)^n} \overset{z\,②}{\geq} (1+a)(1+na)$$

$$= 1+a+na+na^2 = 1+(n+1)a+\underset{\vee\!\vee \atop 1\ 0}{na^2}$$

$$\geq 1+(n+1)a.$$

A więc TAK.

Na mocy zasady indukcji twierdzenie zachodzi dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Wniosek – istnienie pierwiastków:

Twierdzenie: Dla dowolnej liczby rzeczywistej $a \geq 0$ i dowolnego $k \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jedna liczba $b \in \mathbb{R}$ taka, że $b \geq 0$ i $b^k = a$.
Piszemy wówczas $b = \sqrt[k]{a}$.

Dowód

Gdy $a = 0$, to oczywiście $b = 0$ spełnia warunki $b \geq 0$, $b^k = a$; to, że to jedyne rozwiązanie, wykażemy później.

Załóżmy, że $a > 0$; niech $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, \ x^k < a\}$
Zbiór B jest

- niepusty

Łatwo możemy sprawdzić, że $\frac{a}{a+1} \in B$:

$$\frac{a}{a+1} > 0, \quad \left(\frac{a}{a+1}\right)^k \leq \frac{a}{a+1} < a$$

- i ograniczony z góry

np. przez $1+a$: jeżeli $x \geq 1+a$, to $x^k \geq (1+a)^k \geq$
$\geq 1 + ka \geq 1 + a > a$,

a więc $\forall_{y \in B} \ y < 1+a$.

Stąd zbiór B ma kres górny. Oznaczmy $b = \sup B$.
Wykażemy nie wprost, że $b^k = a$.

Jeżeli bowiem $b^k \neq a$, to albo $b^k < a$, albo $b^k > a$

<u>przypadek $b^k < a$</u>

wykażemy, że istnieje $b_1 > b$ takie, że $b_1^k < a$
(a więc $b_1 \in B$ i $b_1 > b$ – sprzeczność z tym, że $b = \sup B$)

Niech $b_1 = \dfrac{b}{1-\varepsilon}$, gdzie ε jest bardzo małe i >0
(jak małe – za chwilę).

$$b_1^k = \left(\frac{b}{1-\varepsilon}\right)^k = \frac{b^k}{(1-\varepsilon)^k} \leqslant \frac{b^k}{1-k\varepsilon} \overset{?}{<} a$$

tego chcielibyśmy,
jest to równoważne

$$\frac{b^k}{a} \overset{?}{<} 1 - k\varepsilon, \text{ czyli } \varepsilon < \frac{1}{k}\left(1-\frac{b^k}{a}\right).$$

Wystarczy zatem wziąć $\varepsilon = \dfrac{1}{2k}\left(1-\dfrac{b^k}{a}\right) > 0$,

by mieć $b_1^k < a$ ↯.

to jest <1

<u>przypadek $b^k > a$.</u>

wykażemy, że istnieje $b_2 < b$ takie, że b_2 jest ograniczeniem górnym B – znów sprzeczność z tym, że $b = \sup B$.↯

Niech $b_2 = b(1-\beta)$ dla bardzo małego $\beta > 0$, wtedy oczywiście $b_2 < b$,

$$b_2^k = [b(1-\beta)]^k = b^k(1-\beta)^k \geqslant b^k(1-k\beta) \overset{?}{>} a$$

$$\beta \overset{?}{<} \frac{1}{k}\left(1-\frac{a}{b^k}\right),$$

wystarczy zatem wziąć

$$\beta = \frac{1}{2k}\left(1-\frac{a}{b^k}\right),$$

<1

by mieć $b_2^k > a$.

Jeżeli teraz $x > b_2$, to $x^k > b_2^k > a$, zatem jeżeli $x \in B$, to $x \leq b_2$, czyli b_2 jest ograniczeniem górnym B $\lightning$.

Pozostało udowodnić, że istnieje tylko jedna taka liczba.
Gdyby $b_1 \neq b_2$, ~~$b_1^k \leq b_2$~~ to albo $b_1 < b_2$, albo $b_1 > b_2$. Jeżeli $b_1 < b_2$, to $b_1^k < b_2^k$, nie może więc być $b_1^k = a = b_2^k$.
Analogicznie gdy $b_1 > b_2$. $\square$.

<u>Twierdzenie</u>: Niech $n \in \mathbb{N}$, wówczas $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ lub $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

<u>Dowód</u> (Dedekind?)

$[a] = \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \leq a\}$ – część całkowita liczby a

Załóżmy, że $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ i $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$
Wówczas $0 < \sqrt{n} - [\sqrt{n}] < 1$
i $\sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ jest liczbą wymierną
– zatem istnieje $k \in \mathbb{N}$ t.ż. $k(\sqrt{n} - [\sqrt{n}]) \in \mathbb{N}$.
Niech $K = \{k \in \mathbb{N} : k(\sqrt{n} - [\sqrt{n}]) \in \mathbb{N}\}$. Jak wspomniałem, $K \neq \emptyset$, a więc w K jest element najmniejszy k_0.
Z definicji K wiemy, że

$$k_1 = k_0(\sqrt{n} - [\sqrt{n}]) \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że

$$0 < k_1(\sqrt{n} - [\sqrt{n}]) = k_0(\sqrt{n} - [\sqrt{n}])^2 = k_0(n - 2\sqrt{n}[\sqrt{n}] + [\sqrt{n}]^2)$$
$$= k_0(n - 2(\sqrt{n} - [\sqrt{n}])[\sqrt{n}] + 3[\sqrt{n}]^2) =$$
$$= \cancel{k_0}\, k_0(n + 3[\sqrt{n}]^2) - 2[\sqrt{n}]\underbrace{k_0(\sqrt{n} - [\sqrt{n}])}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}$$

a skoro >0, to $\in \mathbb{N}$

zatem $k_1 \in K$ $\lightning$, bo $k_1 < k_0$, a k_0 jest w K najmniejszy.

Uwagi

1. Umawiamy się, że umiemy wyciągać pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb ujemnych:

Dla $a<0$, k nieparzystego

$$\sqrt[k]{a} \stackrel{df}{=} -\sqrt[k]{-a}.$$

(rzeczywiście ma to sens, bo

$$(\sqrt[k]{a})^k = (-\sqrt[k]{-a})^k = (-1)^k (\sqrt[k]{-a})^k = (-1)^k(-a)$$
$$= (-1)\cdot(-a)$$
$$= a.)$$

2. W powyższym dowodzie niewymierności $\sqrt{n}$ korzystaliśmy z części całkowitej $x \in \mathbb{R}$, ozn. $[x]$.

Zdefiniowaliśmy $[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$.

Skąd wiemy, że:
- te supremum istnieje?
- jest liczbą całkowitą?

Na pierwsze pytanie odpowiedź jest prosta: zbiór $\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ jest ograniczony z góry (przez x). Odpowiedź na drugie zawarta jest w poniższym twierdzeniu:

<u>Twierdzenie</u> (zasady maksimum i minimum dla liczb całkowitych)

W każdym niepustym, ograniczonym z góry/dołu podzbiorze A zbioru $\mathbb{Z}$ istnieje element największy/najmniejszy.

Do dowodu tego twierdzenia potrzebny nam będzie Lemat (twierdzenie pomocnicze) mówiące, że dodatnie liczby całkowite są liczbami naturalnymi.

<u>Lemat</u>: Jeżeli $k \in \mathbb{Z}$ i $k > 0$, to $k \in \mathbb{N}$.

<u>Dowód Lematu</u>: Z definicji $\mathbb{Z}$ wiemy, że istnieją liczby naturalne $n, m \in \mathbb{N}$ tż. $k = n - m$. Skoro $k > 0$, to $n > m$.

Niech $A = \{ n \in \mathbb{N} : (m \in \mathbb{N} \wedge n > m) \overset{(*)}{\Longrightarrow} n - m \in \mathbb{N} \}$.

(•) $1 \in A$, bo dla $n = 1$ poprzednik implikacji (*) ma postać

$$m \in \mathbb{N} \wedge m < 1$$

a te 2 warunki nigdy nie są razem spełnione – więc poprzednik (*) jest fałszywy (a cała implikacja (*) – prawdziwa).

(••) Załóżmy, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(m \in \mathbb{N} \wedge n > m) \overset{(Z)}{\Rightarrow} n - m \in \mathbb{N}$$

(•••) Czy prawdą jest

$$(l \in \mathbb{N} \wedge n+1 > l) \overset{(T)}{\Rightarrow} n+1-l \in \mathbb{N} \quad ?$$

(specjalnie używam nowego oznaczenia l, bo w (Z) i (T) n jest to samo, zaś m i l niekoniecznie).

Przyjrzyjmy się (T) dla $\boxed{l = 1}$

Następnik (T) ma wtedy postać $\underbrace{n+1-1}_{= n} \in \mathbb{N}$

jest więc prawdziwy (i z nim cała implikacja (T))

A gdy $\boxed{l > 1}$? Wtedy

$l \in \mathbb{N}$ i $l > 1 \Rightarrow l - 1 \in \mathbb{N}$ (z tw. o własnościach $\mathbb{N}$).

Jeżeli ~~zacho~~ prawdziwy jest poprzednik (T):

$$l \in \mathbb{N} \wedge n+1 > l$$
$$\Downarrow$$
$$n > l - 1$$

to dla $m = l - 1$ zachodzi poprzednik (Z).

$m \in \mathbb{N} \wedge n > m$

więc z założenia zachodzi i następnik (Z):

$n - m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n - l + 1 \in \mathbb{N}$

A to jest właśnie następnik (T).

Dowód twierdzenia:

Niech $A \subset \mathbb{Z}$, $A \neq \emptyset$

Załóżmy najpierw, że A jest ograniczony z dołu przez $a \in \mathbb{R}$.

Zbiór $\mathbb{N}$ nie jest ograniczony z góry, więc istnieje $n_0 > -a$.

Rozpatrzmy zbiór $A_0 = \{m \in \mathbb{Z} : m - n_0 \in A\}$

Jeżeli $m \in A_0$, to $m - n_0 \geqslant a$, więc $m \geqslant a + n_0 > 0$. Stąd, na mocy lematu, $m \in \mathbb{N}$ (bo jest dodatnią liczbą całkowitą).

Tym samym $A_0 \subset \mathbb{N}$. Oczywiście $A_0 \neq \emptyset$ (bo $A \neq \emptyset$), zatem w A_0 jest element najmniejszy $m_0 \in \mathbb{N}$. $m_0 \in A_0$.

$$\forall_{m \in A_0} \quad m_0 \leq m$$

$$m_0 - n_0 \leq \underbrace{m - n_0}_{\in A} \qquad \text{i skoro } m_0 \in A_0, \text{ to } m_0 - n_0 \in A.$$

I teraz $m_0 - n_0$ jest elementem najmniejszym w A.

Załóżmy teraz, że A jest ograniczony z góry przez $b \in \mathbb{R}$.

Niech $B = \{m \in \mathbb{Z} : -m \in A\}$

Skoro A jest ogr. z góry przez b, to B – z dołu przez $(-b)$. Tym samym w B jest element najmniejszy $m_0 \in B$; oczywiście $-m_0 \in A$.

$$\forall_{m \in A} \quad -m \geqslant m_0$$

$$m \leq -m_0 \qquad -m_0 \in A$$

więc $-m_0$ jest największy w A. $\square$

Zauważmy, że $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Gdyby bowiem $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, to $\sqrt{2}$ byłby liczbą naturalną. Załóżmy że rzeczywiście $\sqrt{2} \in \mathbb{N}$, stąd $\sqrt{2} \geq 1$. Wiemy, że $\sqrt{2} \neq 1$, bo $1 \cdot 1 = 1 \neq 2$, zatem $\sqrt{2} > 1 \Rightarrow \sqrt{2} \geq 2 \Rightarrow 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \geq 2 \cdot 2 = 4$ ↯.

Gęstość $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$:

Twierdzenie: Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ istnieje

① $c \in \mathbb{Q}$ leżąca między a i b, czyli $a < c < b$,

② $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ leżąca między a i b, czyli $a < d < b$.

Dowód

①. Zacznijmy od wykazania, że istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{1}{n} < b - a$. Wynika to z nieograniczoności $\mathbb{N}$ z góry (istnieje $n \in \mathbb{N}$ tż $n > \frac{1}{b-a}$).

Teraz szukamy liczby wymiernej postaci $\frac{m}{n}$ takiej, że $a < \frac{m}{n} < b$.
Niech $A = \{m \in \mathbb{Z} : \frac{m}{n} \geq b\}$. A jest niepusty (istnieje $m \in \mathbb{N}$ tż. $m \geq n \cdot b$ — z nieograniczoności $\mathbb{N}$ z góry), więc w A istnieje element najmniejszy m_0.
Mamy $\frac{m_0}{n} \geq b > \frac{m_0 - 1}{n}$ (bo $m_0 - 1 \notin A$).

i dalej

bo $\frac{m_0}{n} \geq b$

$$\frac{m_0}{n} \geq b > \frac{m_0 - 1}{n} = \frac{m_0}{n} - \frac{1}{n} > \frac{m_0}{n} - (b-a) \geq b-(b-a) = a .$$

bo $m_0 - 1 \notin A$ bo $\frac{1}{n} < b-a$

A więc $m = m_0 - 1$ spełnia warunek

$b > \frac{m}{n} > a$, wystarczy więc wziąć $c = \frac{m_0 - 1}{n}$.

② . Z punktu ① wiemy, że istnieje $c \in \mathbb{Q}$, $a < c < b$.

Z pewnika Archimedesa dla liczb $\sqrt{2}$ i $b-c$ (obu >0) istnieje $n \in \mathbb{N}$ t.ż. $\sqrt{2} < n(b-c)$.

Stąd

$$a < c < c + \frac{\sqrt{2}}{n} < c + (b-c) = b .$$

Liczba $d = c + \frac{\sqrt{2}}{n}$ nie jest wymierna, gdyby bowiem $d \in \mathbb{Q}$, to $n(d-c) = \sqrt{2}$ też byłaby wymierna. (oczywiście suma, różnica, iloczyn i iloraz liczb wymiernych są wymierne).