Definicja: Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest kresem dolnym zbioru $A \subset \mathbb{R}$, jeżeli

(·) b jest ograniczeniem dolnym zbioru A, tj $\forall_{x \in A} \; b \leq x$,

(··) jeżeli $a > b$, to a nie jest ograniczeniem dolnym zbioru A, tj $\exists_{x \in A} \; x < a$.

Twierdzenie: Każdy ograniczony z dołu podzbiór $\mathbb{R}$ ma kres dolny.

Dowód: Niech A będzie podzbiorem $\mathbb{R}$, ograniczonym z dołu przez $m \in \mathbb{R}$.

Oznaczmy $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$.

Zauważmy, że B jest ograniczony z góry przez liczbę $(-m)$, jeżeli bowiem $y \in B$, to $-y \in A$, a więc

$$m \leq -y \quad \Big| +(-m)$$
$$m + (-m) \leq (-y) + (-m)$$
$$0 \leq (-y) + (-m) \quad \Big| +y$$
$$0 + y \leq (-y) + (-m) + y$$
$$y \leq -m$$

Wykazaliśmy powyżej, że $\forall_{y \in B} \; y \leq -m$, a więc B jest ograniczony z góry przez $(-m)$.
Z aksjomatu ciągłości B ma kres górny $\sup B$.
Sprawdzimy, że $(-\sup B)$ spełnia warunki na bycie kresem dolnym A.

(·) czy $(-\sup B)$ jest ograniczeniem dolnym A?

Jeżeli $x \in A$, to $(-x)$ należy do B,
(bo $-(-x) = x$ — dlaczego?)
więc $(-x) \leq \sup B \quad |+x$

$$0 = x + (-x) \leq x + \sup B \quad /+(-\sup B)$$

$$(-\sup B) \leq x$$

a więc $\forall_{x \in A} \ (-\sup B) \leq x \Rightarrow -\sup B$ jest ograniczeniem dolnym zbioru A.

(••) czy jeżeli $a > -\sup B$, to istnieje $x \in A$ taki, że $x < a$?

$a > -\sup B$ oznacza, że $-a < \sup B$,
a to, z definicji kresu górnego (punkt (••)),
że istnieje $y \in B$ taki, że $-a < y$.
Niech $x = -y$. Oczywiście $x \in A$ (bo $-x = y \in B$),
oraz $-a < y = (-x)$

$$a > x$$

$$x < a.$$

□.

Udowodnimy jeszcze jedną przydatną własność:

Twierdzenie: $0 < 1$.
Dowód: Mamy 3 możliwości: $0<1$, $0=1$ ~~lub~~ albo $1<0$.
Środkową wyklucza aksjomat o istnieniu jedynki.
~~Jeżeli~~ Gdyby $1<0$, to $0 = 1+(-1) < 0+(-1) = -1$.
~~Wykluczmy z teraz że~~
z aksjomatu 13 mielibyśmy $(-1)\cdot(-1) > 0$.

Ale $(-1)\cdot(-1) + (-1) = (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 = (-1)\cdot((-1)+1) =$
$= (-1)\cdot 0 = 0 \quad /+1$

skąd $(-1)\cdot(-1) = (-1)\cdot(-1) + (-1) + 1 = 0 + 1 = 1$

a więc $1>0$ – sprzeczność z założeniem.
Pozostaje trzecia możliwość: $0<1$ □.

Ważne podzbiory $\mathbb{R}$

- liczby naturalne $\mathbb{N}$

$2 = 1+1$

$3 = 1+1+1 = 2+1$ itd

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Uwaga: teraz już wiemy, że $1+1 \neq 0$, bo

$$0<1.$$

$$1 = 1+0 < 1+1$$

$$1>0,\ 1+1>1 \Rightarrow 1+1>0 \quad \square.$$

Powyższa definicja $\mathbb{N}$ jest trochę „szemrana" – co to są te trzy kropki? Czy wypisane tam liczby nie zaczynają się powtarzać?

Na pozór sztuczna, ale przydatna jest następująca definicja, tym razem uczciwa.

Definicja: Niech $\mathcal{A}$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów $A \subset \mathbb{R}$ mających poniższe 2 własności:

(•) $1 \in A$

(••) jeżeli $x \in A$, to $x+1 \in A$.

Zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$ nazywamy część wspólną wszystkich zbiorów z $\mathcal{A}$: $\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$

<u>liczby całkowite</u> $\mathbb{Z}$ (Zahl)

$$\mathbb{Z} = \{\underbrace{m + (-n)}_{\text{ozn } (m-n)} : m, n \in \mathbb{N}\}$$

<u>liczby wymierne</u> $\mathbb{Q}$ (quotient)

$$\mathbb{Q} = \{\underbrace{p \cdot q^{-1}}_{\text{ozn } \frac{p}{q}} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$$

<u>Uwaga:</u> $\mathbb{N}$ ze standardowymi działaniami $+, \cdot$ spełnia aksjomaty 1, 2, 5-7, 9-14, ale 3, 4, 8 już nie!

Których aksjomatów NIE SPEŁNIAJĄ:

- $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q}$?

Na koniec ważna obserwacja:

<u>Twierdzenie:</u> $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

<u>„Dowód"</u>: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: gdyby $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, to istniałyby p, q takie, że $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} = p/q$.

Możemy założyć, że p i q nie mają wspólnych dzielników (w przeciwnym przypadku skracamy ułamek)

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \iff 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ jest parzyste

$\Rightarrow p$ jest parzyste $\Rightarrow p = 2k \Rightarrow 2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$

$\Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2$ jest parzyste $\Rightarrow q$ jest parzyste.

A więc jednak p i q mają wspólny dzielnik – – dwójkę. Sprzeczność. □

Dowód w cudzysłowiu, bo, choć poprawny, korzysta z mnóstwa nieudowodnionych na razie faktów. Na przykład – skąd w ogóle wiemy, że istnieje liczba rzeczywista $\sqrt{2}$ o tej własności, że jej kwadrat jest równy 2?

Uczciwy dowód niebawem.

Aby sprawnie prowadzić rachunki, zdefiniujmy i wprowadźmy najważniejsze własności wartości bezwzględnej:

Definicja: Wartością bezwzględną (modułem) liczby rzeczywistej x nazywamy liczbę

$$|x| = \begin{cases} x & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x & \text{gdy } x < 0 \end{cases}$$

Twierdzenie: Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$

1. $|-x| = |x|$
2. $|x| \geq x$
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
4. $|x+y| \leq |x| + |y|$
5. $||x| - |y|| \leq |x-y|$

} nierówności trójkąta.

Dowód:

Dowody własności 1 – 3 są trywialne, wymagają jedynie sprawdzenia wszystkich przypadków.

4: Rozpatrzymy 2 przypadki

albo $x+y \geq 0$

wtedy $|x+y| = x+y \underset{}{\overset{z\ 2}{\leq}} |x|+|y|$

albo $x+y < 0$

wtedy $|x+y| = -(x+y) \underset{\text{dlaczego?}}{=} (-x)+(-y) \overset{z\ 2}{\leq} |-x|+|-y| \underset{z\ 1}{=} |x|+|y|$

5 Zauważmy najpierw, że

$|x| = |(x-y)+y| \underset{4}{\leq} |x-y|+|y|$, a więc $|x|-|y| \leq |x-y|$

analogicznie

$|y| = |(y-x)+x| \leq |y-x|+|x|$, a więc $|y|-|x| \leq |y-x| = |x-y|$

Na koniec wystarczy spostrzec, że $||x|-|y||$ jest równe, w zależności od znaku liczby wewnątrz „zewnętrznego" modułu, $|x|-|y|$ lub $|y|-|x|$. Obie te liczby są ~~mniejsze~~ nie większe od $|x-y|$, a zatem $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

I jeszcze umowa: zdefiniujemy sup i inf dla
- zbiorów nieograniczonych
- zbioru pustego

To nie znaczy, że zbiory te mają kresy (w sensie podanej przez nas definicji), ale umowa ta jest dość wygodna:

$\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$

jeżeli A nie jest ogr. z góry, to $\sup A = +\infty$

——"—— z dołu, to $\inf A = -\infty$.

Własności liczb naturalnych i zasada indukcji

Przypomnijmy definicję liczb naturalnych $\mathbb{N}$:

Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną wszystkich tych podzbiorów A zbioru $\mathbb{R}$, które spełniają poniższe dwa warunki:

($\cdot$) $1 \in A$

($\cdot\cdot$) jeżeli $x \in A$, to $x+1 \in A$.

Przykłady zbiorów należących do $\mathcal{A}$:

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\mathbb{R}_+^* = \{ x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0 \}$

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

<u>Definicja</u>: $\mathbb{N}$ to część wspólna wszystkich zbiorów z rodziny $\mathcal{A}$. $\mathbb{N} = \bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} A$

<u>Uwaga</u>: Zbiór $\mathbb{N}$ też należy do $\mathcal{A}$:

~~jeżeli~~ ($\cdot$) Czy $1 \in \mathbb{N}$? Wiemy, że $\forall_{A \in \mathcal{A}} \; 1 \in A$,

więc $1 \in \bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}} A = \mathbb{N}$

($\cdot\cdot$) Niech $x \in \mathbb{N}$. Czy $x+1 \in \mathbb{N}$?

$$x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \Leftrightarrow \forall_{A \in \mathcal{A}} \; x \in A \Rightarrow \forall_{A \in \mathcal{A}} \; x+1 \in A$$

$$\Updownarrow$$

$$x+1 \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \mathbb{N}.$$

<u>Twierdzenie</u>: Zbiór $\mathbb{N}$ nie jest ograniczony z góry

<u>Dowód</u>: Załóżmy przeciwnie – wówczas z aksjomatu ciągłości $\mathbb{N}$ ma kres górny $a = \sup \mathbb{N}$.

Stąd $\forall_{n \in \mathbb{N}} \; n \leq a$.

Ale jeżeli $n \in \mathbb{N}$, to $n+1$ też należy do $\mathbb{N}$, więc $\forall_{n \in \mathbb{N}} \; n+1 \leq a \iff \forall_{n \in \mathbb{N}} \; n \leq a-1$

to oznacza, że $a-1$ jest ograniczeniem górnym zbioru $\mathbb{N}$.

Ale $a-1 < a$ (bo to jest równoważne $0<1$), co jest sprzeczne z tym, że $a = \sup \mathbb{N}$. (więc $\mathbb{N}$ nie ma ograniczeń górnych mniejszych od a). $\lightning$

<u>Wniosek</u>: (pewnik Archimedesa)

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ takich, że $a>0$ i $b>0$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $an > b$.

<u>Dowód</u>: Załóżmy przeciwnie – dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$, $a,b>0$ mamy

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \; an \leq b$$

Wtedy $\forall_{n \in \mathbb{N}} \; n \leq a^{-1} \cdot b \quad \left(= \frac{b}{a}\right)$

i $a^{-1}b$ jest ograniczeniem górnym $\mathbb{N}$ (a takiego ograniczenia nie ma). $\lightning$

Twierdzenie

① $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ n \geq 1$ („liczby naturalne zaczynają się od 1")

② jeżeli $n\in\mathbb{N}$ i $n>1$, to $n-1\in\mathbb{N}$
(„póki $n>1$, możemy schodzić w dół o 1, pozostając w $\mathbb{N}$")

③ jeżeli $m, n\in\mathbb{N}$ i $m>n$, to $m\geq n+1$
(„liczby naturalne są rozłożone rzadko – – nie ma żadnej między n a $n+1$")

④ W każdym niepustym podzbiorze A zbioru liczb naturalnych znajduje się element najmniejszy, tj taki element $n_0 \in A$, że $\forall_{n\in A}\ n_0 \leq n$.

(ZASADA MINIMUM) (oczywiście wtedy $n_0 = \inf A$).

Dowody pierwszych trzech punktów będą przebiegały według tego samego schematu:
- rozważymy zbiór A tych liczb naturalnych, które mają pożądaną własność
- wykażemy, że zbiór ten należy do rodziny $\mathcal{A}$ (tj. spełnia warunki (·) i (··))

z definicji $A\subset\mathbb{N}$, ale skoro $A\in\mathcal{A}$, to $\mathbb{N}\subset A$, a więc $A=\mathbb{N}$ i pożądaną własność mają wszystkie liczby naturalne.

Schemat ten jest znany jako tzw. ZASADA INDUKCJI, sformułujemy ją jako twierdzenie za chwilę.

Dowód twierdzenia:

① Niech $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$

Oczywiście $A \subset \mathbb{N}$. Czy $A \in \mathcal{A}$?

Trzeba sprawdzić oba warunki, jakie ma spełniać zbiór A, by należeć do $\mathcal{A}$:

(·) czy $1 \in A$? Tak, $1 \geq 1$.

(··) załóżmy, że $n \in A$. Czy $n+1 \in A$?

Skoro $n \in A$, to $n \geq 1$.

Aby $n+1 \in A$, musi być $n+1 \geq 1$, ale to jest prawda, bo $n+1 \geq n$, a $n \geq 1$, z przechodniości $n+1 \geq 1$.

A więc $n+1 \in A$.

Tym samym wykazaliśmy, że $A \in \mathcal{A}$, a więc $\mathbb{N} \subset A$.

To oznacza, że $A = \mathbb{N}$ i $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n \geq 1$.

② Niech $A = \{n \in \mathbb{N} : (\text{jeżeli } n > 1, \text{ to } n-1 \in \mathbb{N})\}$

(zbiór tych $n \in \mathbb{N}$, dla których ta implikacja jest prawdziwa).

Sprawdzamy, jak poprzednio:

(·) czy $1 \in A$?

czyli czy dla $n=1$ implikacja $(n>1) \Rightarrow (n-1 \in \mathbb{N})$ jest prawdziwa?

Tak, bo dla $n=1$ poprzednik jest fałszywy!

(··) załóżmy, że, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, $n \in A$.

Czy $n+1 \in A$?

Innymi słowy, czy implikacja

$(n+1 > 1) \Rightarrow (n \in \mathbb{N})$ jest prawdziwa?

~~Poprzednik implikacji jest prawdziwy, bo skoro $n \in \mathbb{N}$~~