Analiza matematyczna 1.1
semestr zimowy 2012

Paweł Goldstein
goldie@mimuw.edu.pl
http:\\www.mimuw.edu.pl\~goldie
pokój 5160

Zasady zaliczania

2 kolokwia	2 × 60 punktów
prace domowe	30 punktów
aktywność na ćwiczeniach	30 punktów
	maksymalnie 180 punktów.

Kolokwia

Pierwsze kolokwium odbędzie się w drugiej połowie listopada, drugie – w pierwszej połowie stycznia. Na każdym będzie 6 jednakowo punktowanych zadań, w tym co najmniej 3 z Jawnej Puli Zadań – szczegóły na mojej stronie. Uwaga: Jawna Pula jest aktualizowana, jej obecna postać nie jest ostateczna.

Z ostatniej chwili: terminy kolokwiów to 16 listopada i 18 stycznia.

Na kolokwiach NIE WOLNO korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy koleżeńskiej itp. Należy przynieść własny papier (każde rozwiązanie na oddzielnej kartce).

Ćwiczenia

Zgodnie z regulaminem studiów, obecność na ćwiczeniach jest OBOWIĄZKOWA!
Kto przekroczy limit 5 nieusprawiedliwionych nieobecności, musi liczyć się z tym, że nie uzyska zaliczenia.

Zajęcia wyrównawcze

Studenci starszych lat będą prowadzili specjalne zajęcia - konsultacje. Szczegóły podam niebawem i bardzo zachęcam do korzystania z tej pomocy.

Zachęcam też do korzystania z konsultacji, do prowadzenia których zobowiązani są wszyscy prowadzący zajęcia z AM1.1 - w sumie 14 osób!

Co to jest i czym zajmuje się Analiza Matematyczna?

W pewnym uproszczeniu – badaniem własności funkcji określonych (najczęściej) na podzbiorach przestrzeni wektorowej (pojęcie to poznają Państwo na GALu), o wartościach w (tej samej lub innej) przestrzeni wektorowej. W najprostszym przypadku zajmujemy się funkcjami jednej zmiennej rzeczywistej, o wartościach rzeczywistych – – i na tym głównie upłynie nam ten rok. Analiza zajmuje się również sposobami definiowania takich funkcji, matematycznym opisem rozmaitych ciągłych procesów, a jej źródła leżą w konstrukcji narzędzi do opisu zjawisk fizycznych.

Analiza matematyczna to nie tylko teoria matematyczna, ale i język, bez którego trudno ~~wysłowić~~ (a może i nie sposób) wysłowić większość współczesnej matematyki, ale i nauk przyrodniczych, ekonomii czy nawet socjologii (korzystającej z aparatu i języka statystyki). Celem tego przedmiotu jest nie tylko to, by opanowali Państwo materię analizy, ale by biegle nauczyli się Państwo języka, którym będą do Państwa mówili wykładowcy przez następne x lat (i, co gorsza, będą w nim oczekiwać od Państwa odpowiedzi...).

Budowa teorii matematycznej

Współczesne teorie matematyczne mają postać teorii aksjomatycznej: ustalamy, bez definiowania, pewne podstawowe obiekty teorii, a następnie – pewną listę własności i związków między tymi obiektami, ~~nazywam~~
Własności te nazywamy aksjomatami (pewnikami, postulatami) naszej teorii.
Mając obiekty i aksjomaty możemy następnie wywodzić nowe własności – twierdzenia.

Skoro zajmować się będziemy funkcjami określonymi na podzbiorach zbioru liczb rzeczywistych, zaczniemy od aksjomatów liczb rzeczywistych.

Obiekty: Zbiór (nieznanych na razie elementów) $\mathbb{R}$

Uwaga: implicite zakładamy, że rozróżniamy elementy $\mathbb{R}$: mamy więc relację „="

$x = y$ gdy x i y są tym samym elementem $\mathbb{R}$.

Działania

- dodawanie: każdej parze (x,y) elementów $\mathbb{R}$ przypisuje dokładnie jeden element $\mathbb{R}$, oznaczamy $x+y$
- mnożenie: analogicznie, parze (x,y) przypisuje element oznaczamy $x \cdot y$

• relacja $<$ (porządku, nierówności)
każdej parze (x,y) przypisuje wartość logiczną (prawda lub fałsz).
Piszemy $x<y$, gdy parze (x,y) przypisana jest prawda.

Aksjomaty

I Aksjomaty dodawania

1. przemienność dodawania

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \quad x+y=y+x$$

2. łączność dodawania

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad (x+y)+z=x+(y+z)$$

3. istnienie zera

W $\mathbb{R}$ istnieje element 0 o tej własności, że

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad x+0=x$$

4. istnienie elementu przeciwnego

Dla każdego $x\in\mathbb{R}$ istnieje element przeciwny do x, oznaczany $(-x)$, o tej własności, że

$$x+(-x)=0.$$

kwantyfikatory

$\forall$ „for All" dla $\frac{\text{każdego}}{\text{wszystkich}}$

$\exists$ „Exists" istnieje

Uwaga: Każdy zbiór z działaniem spełniającym aksjomaty (1)-(4) nazywamy grupą przemienną.

II aksjomaty mnożenia

⑤ przemienność mnożenia

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \quad x\cdot y = y\cdot x$$

⑥ Łączność mnożenia

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$$

⑦ istnienie jedynki

w $\mathbb{R}$ istnieje element, oznaczany 1, o tej własności, że $\forall_{x\in\mathbb{R}} \; 1\cdot x = x$, przy czym 1 jest różne od 0.

⑧ istnienie elementu odwrotnego

Dla dowolnego x - różnego od 0 elementu $\mathbb{R}$ - istnieje element ~~przeciw~~ odwrotny, oznaczany x^{-1}, o tej własności, że $x\cdot x^{-1}=1$.

Uwaga: Aksjomaty ④-⑧ mówią, że $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ jest grupą przemienną (z działaniem mnożenia).

Aksjomat ⑨ wiąże mnożenie z dodawaniem

⑨ Rozdzielność mnożenia względem dodawania:

$$\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)$$

Zbiór spełniający aksjomaty ①-⑨ nazywamy ciałem.

To jeszcze nie koniec aksjomatów (nic jeszcze nie wiemy o relacji $<$), ale udowodnijmy na razie jakieś twierdzenie

<u>Twierdzenie</u>: $\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad x \cdot 0 = 0.$

<u>Dowód</u>: Z aksjomatu 7 $\quad 1 \cdot x = x$

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x &= x \cdot 1 && \text{z } 5 \\
&= x \cdot (1+0) && \text{z } 3 \quad \text{bo } 1+0=1 \\
&= x \cdot 1 + x \cdot 0 && \text{z } 9 \\
&= x + x \cdot 0 && \text{z } 7 \quad \text{bo } x \cdot 1 = x
\end{aligned}
$$

zatem $\quad x + x \cdot 0 = x$

z 4 istnieje $(-x)$ tż. $\quad x + (-x) = 0$, więc

$$x + x\cdot 0 + (-x) = x + (-x) = 0$$

$$
\begin{aligned}
x + x \cdot 0 + (-x) &= x + (-x) + x \cdot 0 && \text{z } 1 \\
&= 0 + x \cdot 0 && \text{z } 4 \\
&= x \cdot 0 && \text{z } 3
\end{aligned}
$$

A więc ostatecznie $\quad x \cdot 0 = 0$

$\square$

W aksjomacie 7 zapostulowaliśmy, że $1 \neq 0$.
Czy możemy udowodnić, że $1+1 \neq 0$?

Otóż nie, a w każdym razie nie przy tak skromnym zestawie aksjomatów!

Ćwiczenie: Zbiór $X = \{0, 1\}$ z działaniami

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

spełnia wszystkie 9 aksjomatów!
A w zbiorze tym $1+1=0$...

A zatem potrzebujemy więcej aksjomatów.

III aksjomaty porządku

10 zasada trichotomii
Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości:

albo $x<y$, albo $x=y$, albo $y<x$

11 przechodniość nierówności

$\forall_{x,y,z \in \mathbb{R}}$ jeżeli $x<y$ i $y<z$, to $x<z$

Następne dwa aksjomaty wiążą nierówność z działaniami.

(12) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}$ jeżeli $x<y$, to $x+z<y+z$

(13) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}$ jeżeli $0<x$ i $0<y$, to $0<x\cdot y$

Uwaga: Odtąd przestaniemy się wygłupiać i zaczniemy używać standardowej notacji:

$$x>y \iff y<x$$
$$x\le y \iff x<y \text{ lub } x=y$$
$$x\le y \iff y\ge x \quad \text{itp.}$$

Został nam jeszcze jeden, bardzo ważny aksjomat, zwany aksjomatem ciągłości lub aksjomatem Dedekinda

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916)
niemiecki matematyk, autor wielu prac dotyczących podstaw matematyki, twórca pojęć grupy i pierścienia.

Żeby wysłowić ten aksjomat, potrzebujemy kilku naturalnych definicji.

Definicja: zbiór $A\subset\mathbb{R}$ jest ograniczony z góry (przez $M\in\mathbb{R}$), jeżeli

$$\forall_{x\in A} \quad x\le M.$$

Mówimy wówczas, że M jest ograniczeniem górnym zbioru A.

Zbiór liczb z przedziału $(0;5)$ jest ograniczony z góry (~~p~~ na przykład przez 6).

<u>Definicja</u> Liczba $a \in \mathbb{R}$ jest <u>kresem górnym</u> zbioru $A \subset \mathbb{R}$, jeżeli

(·) a jest ograniczeniem górnym zbioru A

(··) jeżeli $b < a$, to b NIE JEST ograniczeniem górnym zbioru A, tj. istnieje $x \in A$ t.ż. $b < x$.

Innymi słowy, kres górny to najmniejsze ograniczenie górne zbioru.
Kres górny zbioru A oznaczamy $\sup A$, co czytamy „supremum A".

(14) aksjomat ciągłości

Każdy niepusty i ograniczony z góry podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ ma kres górny

<u>Umowa</u>: Jeżeli A nie jest ograniczony z góry, to piszemy $\sup A = +\infty$,
Jeżeli $A = \emptyset$, to $\sup A = -\infty$.
Nie znaczy to, że zbiory te mają kres górny!

Analogicznie do kresu górnego definiujemy kres dolny, oznaczany inf (infimum, od łac. infimus - drobny, niewielki)