GAL, Kolokwium nr 1, Temat B

18 listopada 2005

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała, lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia.
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu

Zadanie 1

Niech $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leqslant -\mathrm{Re}z \leqslant \mathrm{Im}z\} \subset \mathbb{C}$ i niech funkcje $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oraz $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będą określone wzorami

$$f(z) = (1 + i\sqrt{3})z^3 + 3$$
$$g(z) = (z - 4i)^3.$$

Naszkicować i opisać zbiór

(a) $f(D)$

(b) $g^{-1}(D)$

Zadanie 2

Dla wielomianu $f(x) = x^6 - x^4 + x^2$ znaleźć:

(a) rozkład f na iloczyn czynników stopnia 1 o współczynnikach w $\mathbb{C}$.

(b) rozkład f na iloczyn czynników stopnia $\leqslant 2$ o współczynnikach w $\mathbb{R}$.

Zadanie 3

Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni $V \subset \mathbb{R}^4$ jeżeli:

(a) V jest przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(b) $V = \mathrm{lin}((1,-1,1,2),(0,2,0,1),(1,3,1,4),(1,1,1,s))$, gdzie $s \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4

Niech $\alpha_1, ..., \alpha_m$ będą wierszami macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ i niech $\beta_1, ..., \beta_m$ będą wierszami macierzy $B \in M_{m\times n}(K)$ otrzymanej z A za pomocą ciągu operacji elementarnych na wierszach. Pokazać, że:

(a) $\mathrm{lin}(\alpha_1, ..., \alpha_m) = \mathrm{lin}(\beta_1, ..., \beta_m)$

(b) jeżeli B jest macierzą schodkową oraz $\beta_1, ..., \beta_r$ są jej wszystkimi wierszami niezerowymi, to $\beta_1, ..., \beta_r$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathrm{lin}(\alpha_1, ..., \alpha_m)$.

Zadanie 5

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K mająca bazę nieskończoną $\mathcal{A} = \{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, gdzie $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech $V_n = \mathrm{lin}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \subset V$.

(a) Wykazać, że dla każdej skończenie wymiarowej podprzestrzeni $W \subset V$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $W \subset V_n$.

(b) Podać przykład takiej podprzestrzeni $W \subset V$, że $W \neq V$ i dla każdego wektora $\alpha \in V \setminus W$ zachodzi $\{a\alpha + \beta \mid a \in K, \beta \in W\} = V$.