Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat B

1. Niech $w = \sqrt{3} + i$ i niech $D = \{z \in \mathbf{C} \mid Im((1+i)z^3) \geq 0\}$.
a) Przedstawić liczbę w^{105} w postaci $a + bi$ dla $a, b \in \mathbf{R}$.
b) Naszkicować zbiór D. Czy $w \in D$?

2. Niech $s \in \mathbf{R}$ i niech U będzie układem równań w $\mathbf{R}^4$

$$U : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = s^2 + s \\ 2x_1 + 7x_2 + (1 - s^2)x_3^6 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -s(s+1) \ . \end{cases}$$

a) Dla $s = 1$ znaleźć rozwiązanie ogólne układu U.
b) Dla jakich $s \in \mathbf{R}$ zbiór rozwiązań układu U jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbf{R}^4$. Odpowiedź uzasadnić.

3. Niech $V = \text{lin}((2,4,1,5), (1,1,1,1), (0,1,1,0), (1,2,0,3)) \subset \mathbf{R}^4$.
a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V.
b) Znaleźć bazę przestrzeni V zawierającą wektor $(1, -1, 0, 0)$.

4. Niech $W \subset \mathbf{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$U : \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni W.
b) Znaleźć wszystkie wartości $r \in \mathbf{R}$, dla których układ wektorów $(1,0,0,-1)$, $(-3,0,0,r)$ można dopełnić do bazy przestrzeni $\mathbf{R}^4$ wektorami leżącymi w W. Dla każdej takiej wartości r podać przykład otrzymanej w ten sposób bazy przestrzeni $\mathbf{R}^4$.

5. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $k \leq n+1$ istnieje w V układ liniowo zależny $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ taki, że każdy jego podukład właściwy jest liniowo niezależny.