GAL potok 1, kolokwium nr 1, 23.11.2007

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce:
- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat A

1. Niech $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ i niech $D = \{w \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}(iw) > 0\}$.
a) Znaleźć liczby rzeczywiste a, b takie, że $z^{100} = a + bi$.
b) Naszkicować zbiór D. Dla jakich liczb naturalnych $1 \leq k \leq 24$ zachodzi $z^k \in D$?

2. W przestrzeni $\mathbf{R}^4$ rozpatrzmy wektory $\alpha_1 = (1,3,1,3), \alpha_2 = (3,8,2,9), \alpha_3 = (1,5,2,6)$, $\beta = (0,3,2,3)$.
a) Czy układ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jest liniowo niezależny? Czy wektor β jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$?
b) Podać przykład takiego wektora $\gamma \in \mathbf{R}^4$, że układ $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma$ jest bazą przestrzeni $\mathbf{R}^4$. Niech y_1, y_2, y_3, y_4 będą współrzędnymi wektora α_3 w otrzymanej bazie. Znaleźć y_4.

3. Niech $V = \mathrm{lin}((1,1,-2,-5),(1,2,-3,-8),(3,4,-7,-18)) \subset \mathbf{R}^4$ i dla każdego $s \in \mathbf{R}$ niech $W_s \subset \mathbf{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + sx_4 = 0. \end{cases}$$
a) Opisać przestrzeń V układem równań liniowych.
b) Dla jakich wartości $s \in \mathbf{R}$ zachodzi równość $\mathbf{R}^4 = V \oplus W_s$?

4. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni liniowej V.
a) Wykazać, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy żaden z wektorów tego układu nie jest kombinacją liniową pozostałych.
b) Wykazać, że jeśli układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny i $\beta \in V$, to układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

5.
a) Niech W będzie k wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K i niech W_1, W_2 będą jej podprzestrzeniami takimi, że $W_1 \neq W_2$, $\dim W_1 = \dim W_2$ oraz $\dim (W_1 \cap W_2) = k-2$. Wykazać, że $W = W_1 + W_2$.
b) Niech V_1, V_2, V_3 będą m wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V takimi, że $\dim (V_1 \cap V_2) = \dim (V_1 \cap V_3) = \dim (V_2 \cap V_3) = m-1$. Wykazać, że $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3$ lub $\dim (V_1 + V_2 + V_3) = m+1$.
c) Niech $V_1, V_2, \ldots$ będzie ciągiem m wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni liniowej V takim, że $\dim (V_i \cap V_j) = m-1$ dla wszystkich $i \neq j$. Wykazać, że: (istnieje podprzestrzeń $W \subset V$ taka, że $\dim W = m-1$ oraz $W \subset V_i$ dla każdego i) lub (istnieje podprzestrzeń $Z \subset V$ taka, że $\dim Z = m+1$ oraz $V_i \subset Z$ dla każdego i).