Przykładowe rozwiązania z 25.03

Przydatne definicje:

Niech θ będzie wielkością szacowanego przez nas parametru. W hipotezie zerowej (H_0) określamy, jakie wartości przypuszczamy, że θ może przyjmować, będzie to zbiór Θ_0. Przeciwko H_0 stawiamy hipotezę alternatywną H_1, definiującą zbiór wartości, które przyjmuje parametr, jeśli nie jest spełnione H_0, oznaczymy ten zbiór Θ_1.

Zbiór krytyczny testu: zbiór wyników testu, przy których odrzucamy H_0; oznaczymy K.

Błąd I rodzaju: odrzucamy prawdziwe H_o. Oznaczymy $\mathbb{P}_\theta(K)$ dla $\theta \in \Theta_0$ – otrzymaliśmy oszacowanie θ, które należało do prawdziwych wartości szacowanego parametru, jednak odrzuciliśmy je.

Rozmiar testu to prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju. $sup\{\mathbb{P}_\theta(K|\theta \in \Theta_0)\}$. Sprawdzamy, jak bardzo prawdopodobne jest, że wartość oszacowania należąca do Θ_0 znajdzie się w zbiorze krytycznym, przez co odrzucimy H_0.

Zastanówmy się, co w praktyce dla nas oznacza rozmiar testu. Rozróżnimy sytuacje hipotezy prostej (np. $H_0 : \theta = c$) i hipotezy złożonej (np. $H_0 : \theta_1 = c \wedge \theta_2 = d \wedge \theta_3 = e \wedge ...$). Podczas wykładu pojawiło się pojęcie *poziomu istotności* α – dla hipotezy prostej jest ono równoznaczne rozmiarowi testu (i prawdopodobieństwu popełnienia błędu pierwszego rodzaju). Proszę zwrócić uwagę, że w przypadku hipotezy złożonej obliczenie prawdopodobieństwa popełnienia błędu pierwszego rodzaju może być trudniejsze, prawidłowy poziom istotności nie musi być równy założonemu, arbitralnie dobranemu przez nas.

W tym zbiorku występują jedynie testy hipotez prostych, więc mogą Państwo przyjąć, że $sup\{\mathbb{P}_\theta(K)|\theta \in \Theta_0\} \leq \alpha$.

1 Rozmiar i moc testu

Zadanie 1
Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu normalnego $N(m, 2^2)$. Hipotezę $H_0 : m = 1$ przy alternatywie $H_1 : m = 3$ będziemy weryfikować, wykorzystując test o zbiorze krytycznym postaci $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i > k_\alpha\}$.

- Wyznacz k_α, aby otrzymać test o rozmiarze 0,05.
- Jak dużą próbę losową należy pobrać, aby uzyskać test o mocy nie mniejszej niż 0,95?

Rozwiązanie: $X_1, \ldots, X_n \sim N(m, 2^2)$

$H_o : m = 1; H_1 : m = 3$

$K : \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i > k_\alpha\}$

Rozkład $\sum_{i=1}^n X_i$ to $N(nm, n2^2)$ Dalej już korzystamy z definicji rozmiaru, sprawdzamy prawdopodobieństwo, że znajdziemy się w zbiorze krytycznym, pod warunkiem prawdziwej H_0. Korzystamy ze standaryzacji, aby ułatwić późniejsze obliczenia (znalezienie właściwego kwantyla).

W definicji jest "mniejsze równe" – szukamy tutaj maksimum, więc równość je spełnia.

$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i > k_\alpha | m = 1) = \mathbb{P}(U > \frac{k_\alpha - 1n}{2\sqrt{n}}) = 1 - \Phi(\frac{k_\alpha - 1n}{2\sqrt{n}}) = 0,05$

$\Phi(\frac{k_\alpha - 1n}{2\sqrt{n}}) = 0,95$

$\frac{k_\alpha - 1n}{2\sqrt{n}} = 1,64$

$k_\alpha = 3,28\sqrt{n} + n$

Otrzymane k_α wykorzystujemy w drugim podpunkcie. Korzystamy z definicji $\mathbb{P}(K|H_1)$:

$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 3,28\sqrt{n} + n|m = 3) = \mathbb{P}(U \geq \frac{3,28\sqrt{n}+n-3n}{2\sqrt{n}}) = 1 - \Phi(\frac{3,28\sqrt{n}-2n}{2\sqrt{n}}) \geq 0,95$

Pozbywamy się $\sqrt{n}$ – możemy skrócić, bo wiemy, że $n > 0$. Z właściwości dystrybuanty rozkładu normalnego:

$1 - \Phi(-\frac{3,28-2\sqrt{n}}{2}) \leq 0,05$

$\Phi(-\frac{3,28-2\sqrt{n}}{2}) \geq 0,95$

$-\frac{3,28-2\sqrt{n}}{2} \geq 1,64$

$\sqrt{n} \geq 3,28$

$n \geq 10,76$

Czyli próba powinna liczyć co najmniej 11 obserwacji.

Komentarz: Podczas zajęć rozwiązaliśmy jeszcze zadanie 2 i 6 ze zbioru – oparte na podobnym schemacie.

2 Test najmocniejszy

Zadanie 3

Populacja ma rozkład opisany funkcją gęstości postaci $f(x) = \beta e^{(-\beta x)}$ dla $x > 0$. Z tej populacji wylosowano dziesięcioelementową próbę:

1 0,8 1,7 5,5 1,9 8,1 2,6 2,5 1,4 2,4

Przetestuj, wykorzystując test najmocniejszy przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$ hipotezę zerową, że $\beta = \frac{1}{2}$, przeciw hipotezie alternatywnej, że $\beta = \frac{1}{3}$.

Rozwiązanie: $H_0 : \beta = \frac{1}{2}; H_1 : \beta = \frac{1}{3}$

Intuicyjnie możemy patrzeć na test najmocniejszy jako na porównanie maksymalnych prawdopodobieństw uzyskania obserwowanej próby przy prawdziwym H_0 albo przy prawdziwym H_1. Jeżeli stosunek tych prawdopodobieństw wypada na niekorzyść H_0 będziemy skłonni ją odrzucić. Test przy ustalonym α minimalizuje β.

Korzystamy z definicji testu najmocniejszego. Naszym celem jest stworzenie obszaru krytycznego:

$$K : \{\frac{\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)|H_1}{\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)|H_0} \geq c\}$$

$\mathcal{L}$ to wartość funkcji wiarogodności dla naszej próby. Uzupełniamy o informację z zadania (prawdopodobieństwa uzyskania takiej próby):

$$\frac{3^{-10}\exp(-1/3\sum_{i=1}^{10} X_i)}{2^{-10}\exp(-1/2\sum_{i=1}^{10} X_i} \geq c$$

Staramy się uporządkować, przenosząc funkcje x na jedną stronę, a wartości stałe na drugą:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i(1/2 - 1/3) \geq (2/3)^{-10}\ln c$$

$$\sum_{i=1}^{10} X_i \geq 6(2/3)^{-10}\ln c$$

Wszystko, co stoi po znaku większe równe określmy c_1 – wiemy, że to będzie jakaś stała, jest to wartość krytyczna ("wchłania" wartości liczbowe, które wcześniej były po lewej stronie). Należy c_1 znaleźć.

Skorzystajmy z rozmiaru testu. Znowu, możemy wykorzystać równość z poziomem istotności (korzystamy z definicji).

$\mathbb{P}(K|H_0) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{10} > c|\beta = 0.5) = 1 - \mathcal{F}(c_1) = 0.05.$

Musimy określić postać dystrybuanty. Skorzystamy ze sztuczki związanej z równoważnością rozkładów. Pojedyncza próba pochodzi z rozkładu wykładniczego $\mathrm{Exp}(\beta)$, który możemy opisać, wykorzystując rozkład $\Gamma(1, \beta)$. $\sum_{i=1}^{10} X_i$ ma rozkład $\Gamma(10, \beta)$. Ponadto, wiemy, że $\mathrm{Exp}(1/2)$ to rozkład $\chi^2(2)$ i że jeżeli pewna zmienna $X \sim \Gamma(\frac{a}{2}, \frac{1}{2}) \to X \sim \chi^2(a)$. Dlatego, ostatecznie,

$\sum_{i=1}^{10} X_i \sim \chi^2(20).$

Nasze c_1 znajdujemy z odwrotnej dystrybuanty $\mathcal{F}^{-1}(0,95,20) = 31,410.$

Obliczamy wartość statystyki testowej (na podstawie wartości obserwacji podanych w zadaniu) i porównujemy ze znalezioną wartością krytyczną.

$\sum_{i=1}^{10} = 27,9 < 31,410$, czyli nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

Zadanie 10

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ ze znaną wariancją.

- Skonstruuj test najmocniejszy dla hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$ przeciw alternatywie $H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$ na poziomie istotności 0.05
- Oblicz moc uzyskanego testu.
- Jaka powinna być długość próby, aby moc testu była większa od 0.95?

Rozwiązanie:

$H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$

Korzystamy z definicji testu najmocniejszego. Naszym celem jest stworzenie obszaru krytycznego:

$$K : \{\frac{\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)|H_1}{\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)|H_0} \geq c\}$$

$\mathcal{L}$ to wartość funkcji wiarogodności dla naszej próby. Uzupełniamy o informację z zadania (prawdopodobieństwa uzyskania takiej próby). Wiemy, że $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 jest znane:

$$\frac{\Pi_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(X_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2})}{\Pi_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(X_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2})} \geq c$$

Staramy się uporządkować, przenosząc funkcje x na jedną stronę, a wartości stałe na drugą:

$$\frac{\Pi_{i=1}^n \exp(\frac{-X_i^2+2X_i\mu_1-\mu_1^2}{2\sigma^2})}{\Pi_{i=1}^n \exp(\frac{-X_i^2+2X_i\mu_0-\mu_0^2}{2\sigma^2})} \geq c$$

$$\exp(\frac{-\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2\sum_{i=1}^n X_i\mu_1 - n\mu_1^2 + \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\sum_{i=1}^n X_i\mu_0 + \mu_0^2 n}{2\sigma^2}) \geq c$$

$$\exp(\frac{2\sum_{i=1}^n X_i(\mu_1 - \mu_0) + n(\mu_0^2 - \mu_1^2)}{2\sigma^2}) \geq c$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \geq \frac{(2\sigma^2 \ln c - n(\mu_0^2 - \mu_1^2))}{2(\mu_1 - \mu_0)}$$

Po przekształceniach, wszystko, co stoi po znaku większe równe określmy c_1 – wiemy, że to będzie jakaś stała, jest to wartość krytyczna ("wchłonie" wartości liczbowe, które wcześniej były po lewej stronie). Należy c_1 znaleźć.

$$\sum_{i=1}^n X_i \geq c_1$$

Skorzystajmy z rozmiaru testu. Znowu, możemy wykorzystać równość z poziomem istotności (korzystamy z definicji).

$\mathbb{P}(K|H_0) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n > c_1|H_0) = 1 - \mathcal{F}(c_1) = 0.05.$

Musimy określić postać dystrybuanty. Skorzystamy ze standaryzacji. Wiemy, że $\sum_{i=1}^n X_i$ ma w naszym przypadku rozkład $N(n\mu, n\sigma^2)$.

$$1 - \Phi(\frac{c_1 - \mu_o n}{\sigma\sqrt{n}}) = 0.05$$

$$\Phi(\frac{c_1 - \mu_o n}{\sigma\sqrt{n}}) = 0.95$$

Znajdujemy w tablicach potrzebny kwantyl (albo w R: `qnorm(0.95)`): 1.65. Stąd $c_1 = 1.65\sigma\sqrt{n} + \mu_0 n$.

Moc również obliczymy z definicji:

$$\mathbb{P}(K|H_1) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i \geq 1.65\sigma\sqrt{n} + \mu_0 n|H_1) = 1 - \Phi(\frac{1.65\sigma\sqrt{n} + n(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma\sqrt{n}})$$

Aby znaleźć liczebność, dla której moc będzie wyższa niż 0.95, podstawiamy do wzoru, otrzymujemy rozwiązanie:

$$n \geq \frac{3.3\sigma}{\mu_1 - \mu_0}$$