26 styczeń 2007

Topologia rozmaitości zespolonych i teoria Hodge'a

Na najbliższych ćwiczeniach:

LITERATURA
Książki:
– P. Griffiths, J. Harris, Principles of algebraic geometry. (1978) – *podstawy teorii Hodge'a roz. 0*
– D. Huybrechts, Complex geometry. An introduction (2005) – *roz. 3 o teorii Hodge'a. Dużo zadań do robienia*
– C. Voisin, Hodge theory and complex algebraic geometry. I (a dla chetnych II) – *znacznie obszerniejsze zródło*

Notatki z wykladów:
– Mark A. de Cataldo, Lectures on the Hodge theory of projective manifolds
http://front.math.ucdavis.edu/math.AG/0504561

Artykuły:
– E. Looijenga, Cohomology and intersection homology of algebraic varieties. w Kollár, János (ed.), Complex algebraic geometry. AMS Math. Ser. 3, 223-263 (1997).
– K. Lamotke, The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz. Topology 20, 15-51 (1981).

Wiadomości dodatkowe na temat:

Stratyfikacja zbiorów analitycznych
– M. Goresky, R. MacPherson, Stratified Morse theory. (1988). Cz. I roz. 1 (szczególnie tw. z roz. 1.7)

Charakterystyka Eulera
– D. Sullivan, Combinatorial invariants of analytic spaces. w Proceedings of Liverpool Singularities Symposium I, Springer LNM 192, 165-168 (1971).

Produkty w kohomologiach
– M. J. Greenberg, Wyklady z topologii algebraicznej (wiadomosci podstawowe)
– E. Spanier, Topologia algebraiczna

GAGA tj. Geometria Algebraiczna – Geometria Analityczna
– R. Hartshorne, Algebraic geometry, Appendix B (bez dowodów)
– P. Griffiths, J. Adams, Topics in algebraic and analytic geometry, rozdz. 4

Rozwłóknienie Milnora
– J. Milnor, Singular Points of Complex Hypersurfaces. (książeczka)

Laplasjan, operatory eliptyczne i teoria indeksu
– G. Luke, A. S. Mishchenko, Vector Bundles and Their Applications (1998), Rozdział 5.
– Rosenberg, Steven The Laplacian on a Riemannian manifold. (1997) (Wersja elektroniczna jest u mnie.)
– R.S. Palais, Seminar on the Atiyah-Singer index theorem. With contributions by M. F. Atiyah, A. Borel, E. E. Floyd, R. T. Seeley, W. Shih and R. Solovay. (1965)

Teoria snopów:
– *wprowadzenie* • Huybrechts, dodatek B, • Voisin, §4,
– R. Godement: Topologie Algebrique et theorie des faisceaux, (1958). Jest też po rosyjsku, dobre na początek.
Tu jest prawie wszystko, ale lepiej od tego nie zaczynać
– G. E. Bredon: Sheaf theory (1967)
– M. Kashiwara, P.Schapira: Sheaves on Manifolds (1994)

Literatura na teraz - Struktury Hodge'a: abstrakcyjne i mieszane:

– P. Griffiths, W. Schmid: Recent developments in Hodge theory, a discussion of techniques and results, w *Proceedings of the international Colloquium on Discrete Subgroups of Lie Groups (Tata Institute, Bombay 1973)*, Oxford Univ. Press, London 1975, str. 31-127.
– więcej referencji w moich notatkach z wykładów:
http://duch.mimuw.edu.pl/∼aweber/mhs.ps

Residua
– B.W. Szabat, *Wstęp do analizy zespolonej*, Cz II §13

Wielomiany Poincaré i rozmaitości toryczne

– W. Fulton, *Introduction to toric varieties* §4.5 i §5.6

Zeszłe ćwiczenia (było lub ** było planowane):
– tw. przygotowawcze Weierstrassa,

– tw. Ehresmanna o rozwłóknieniu,

– charakterystyka Eulera zbiorów analitycznych wg. Sullivana,

** przekształcenie Eilenberga-Zilbera: Jak triangulować produkt sympleksów?

– tw Stokesa i izomorfizm deRhama,

– dowód formuły projekcji,

– opisać różniczkę w ciągu Mayera-Vietorisa dla homologii singularnych i kohomologii deRhama z nośnikami zwartymi,

– Sprawdzić, że $X^{\vee\vee} = X$ dla:
a) obrazu zanurzenia Segre: $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^3$
$$([s_0 : s_1], [t_0, t_1]) \mapsto [s_0t_0 : s_0t_1 : s_1t_0 : s_1t_1]$$
b) obrazu zanurzenia Veronese: $\mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^3$
$$[s_0 : s_1] \mapsto [s_0^3 : s_0^2 s_1 : s_0 s_1^2 : s_1^3]$$
c) powierzchni w $\mathbf{P}^2$ zadanej wzorem $x^3 + y^3 + z^3 = 0$
(więcej zadań o dualności dla krzywych w [Hartshorne, Algebraic geometry, str 304-305])

– Sprawdzić, że przecinanie transwersalnych podrozmaitiści jest zgodne z produktem kocykli dualnych w kohomologiach. Wskazówka: wyrazić cykl dualny przez klasę Thoma wiązki normalnej.

– Upewnić się że równie dobrze można przecinać cykle, które nie są podrozmaitościami, lecz mają osobliwości kowymiaru ≥ 2.

– Sprawdzić, że dla podrozmaitości $i : N \hookrightarrow M$ cupowanie z klasą dualną do $[N]$ można wyrazić jako $D[N] \cup - = i_! i^* -$.

– Jak wyglądają kohomologie hiperpowierzchni w $\mathbf{P}^n$?

– Dualność rzutowa: Dla $X \subset \mathbf{P}^N$ niech $X^\vee = q(NX) \subset (\mathbf{P}^N)^\vee$ będzie rozmaitością dualną (oznaczenia z wykładu). Udowodnić, że $X^{\vee\vee} = X$.

– Przypuśćmy, że $X^\vee$ w punkcie ξ jest gładką hiperpowierzchnią. Wtedy $T_\xi X^\vee = H_x$ dla pewnego $x \in \mathbf{P}^N$. Sprawdzić, że $(x, \xi) \in NX$.

** Oznaczenia z wykładu: Niech $f(z_1, z_2, \dots z_n) = \sum_{k=1}^n z_i^2$, $\epsilon = 1$, $\rho = \frac{1}{10}$,
$$T = \{z \in \mathbf{C}^n : |z| \leq \epsilon\,,\ |f(z)| \leq \rho\}$$
$$F = \{z \in \mathbf{C}^n : |z| \leq \epsilon\,,\ f(z) = \rho\}$$
Skonstruować monodromię $\mu : F \to F$ dla rozwłoknienia $f^{-1}(S^1_\rho) \cap T \to S^1_\rho$, taką, że $\mu_{|\partial F} = id$.

** Definiujemy cykle:
$\delta = \{z \in F : im(z) = 0\}$, $[\delta] \in H_{n-1}(F)$,
$\delta^* = \{z \in F : \frac{re(z)}{|re(z)|} = (1, 0, \dots, 0)\}$, $[\delta^*] \in H_{n-1}(F, \partial F)$.
Sprawdzić, że $var([\delta^*]) = -[\delta]$, gdzie

$$var : H_*(F, \partial F) \to H_*(F)$$
$$[\xi] \mapsto [\mu_*(\xi) - \xi]$$
jest wariacją stowarzyszoną z rozwłóknieniem z poprzedniego zadania.

** Niech X będzie nierozkładalną hiperpowierzchnią w $\mathbf{P}^n$, a L prostą transwersalna do X. Wykazać, że $\pi_1(L - X) \to \pi_1(\mathbf{P}^n - X)$ jest epimorfizmam.

** Niech X będzie nierozkładalną hiperpowierzchnią w $\mathbf{P}^n$, a L prostą transwersalna do X. W grupie podstawowej $\pi_1(L - X)$ wybieramy generatory – pętle polegające na obchodzieniu pojedyńczych punktów $L \cap X$. Udowodnić, że te generatory są sprzężone w $\pi_1(\mathbf{P}^n - X)$.

– Podać wzór na laplasjan działający na 1-formach na okręgu. Jakie są jego wartości i wektory (t.j. funkcje) własne.

– Jakie są formy harmoniczne na sferze S^n?

– Zinterpretować dualność Poincaré za pomocą gwiaztki Hodge'a.

– Znaleźć przykład wiązek E, F na rozmaitości X takich, że $\pi^*E \simeq \pi^*F$, gdzie $\pi : T^*X - X \to X$, ale $E \not\simeq F$. (Np. $X = S^2$, $E = TX$ ...)

** Udowodnić, że wszystkie gładkie hiperpowierzchnie ustalonego stopnia w przestrzeni rzutowej są dyfeomorficzne.

– Niech G będzie zwartą i spójną grupą Lie z metryką dwustronnie niezmienniczą. Udowodnić, że formy harmoniczne to są dokładnie formy dwustronnie niezmiennicze.

– Rozwiązać równanie przewodnitwa cieplnego $\frac{d}{dt}\omega_t = -\Delta\omega_t$ z warunkiem początkowym $\omega_0 = \delta_1 dt$. Sprawdzić, że dla każdego $t > 0$ klasa $[\omega_t] \in H^1(S^1)$ jest Poincaré dualna do $[pt] \in H_0(S^1)$.

– Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią ze strukturą zespoloną I. Otrzymujemy działanie I na potędze zewnętrznej $\bigwedge^k V_{\mathbf{C}}$. Znaleźć przestzenie własne.

?– Niech $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \ : \ |z_1|^2 + |z_2|^2 = \epsilon^2\} \simeq \mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$ oraz $f : S^3 \to \mathbf{C}$, $f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$. Zrobić film przedstawiający ewolucję powierzchni

$$F_t = \{z \in S^3 \ : \ arg(f(z_1, z_2)) = t\}\,.$$

Zrobić drugi film dla $f(z_1, z_2) = z_1^3 + z_2^2$.

– Niech V i W będą reprezantacjami pewnej algebry Lie. Sprawdzić, że reguła Leibniza zadaje poprawnie reprezentację $V \otimes W$, $Sym^n V$ i $\bigwedge^n V$.

– Pokazać, że wszystkie struktury zespolone na $\mathbf{R}^4$ zgodne ze standardowym iloczynem skalarnym i orientacją są parametryzowane sferą S^2.

– Załóżmy, że mamy trzy struktury zespolone na przestrzeni wektorowej I, J i K spełniające $K = IJ = -JI$. Wtedy V jest przestrzenią liniową nad kwaternionami. Niech ω_I, ω_J i ω_K będą stowrzyszonymi formami symplektycznymi. Pokazać że forma $\omega_I + i\omega_K$ jest typu (2,0) ze względu na strukturę I.

– Niech $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ będą współrzędnymi wektora w bazie ortonormalnej ze względu na iloczyn hermitowski. Sprawdzić, że stowarzyszona forma symplektyczna zadana jest wzorem $\frac{i}{2}\sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k$.

– Spradzić, że $Sym^n\mathbf{R}^2$ jest prostą reprezentacją $\mathbf{sl}(2)$.

– Rozłożyć $\bigwedge^*(\mathbf{C}^n)^\vee_{\mathbf{C}}$ na nieprzywiedlne reprezentacje $\mathbf{sl}(2)$ dla $n = 1, 2, 3$. ($*$ oznacza gradację, $^\vee$ sprzężenie przestrzeni wektorowej.)

– Niech W będzie przestrzenią liniową z iloczynem hermitowskim. Pokazać, że rozkład $\bigwedge^* W^\vee_{\mathbf{C}} = \bigoplus_{p,q,k} L^k P^{pq}$ jest ortogonalny.

– Sprawdzić własnoręcznie dwuliniowe relacje Hodge'a–Riemanna w $\bigwedge^*(\mathbf{C}^2)^\vee_{\mathbf{C}}$.

– Niech $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$ będzie funkcją gładką. Sprawdzić, że rownania Cauchy–Riemanna są spełnione wtedy i tylko wtedy gdy $Df : T_x\mathbf{C}^n \to T_{f(x)}\mathbf{C}^m$ jest przemienne ze strukturą niemal zespoloną dla każdego x.

– $\bar{\partial}$–lemat Poincare.

– Metryka Fubini-Study.

– Opisać strukturę Hodge'a w kohomologiach krzywych eliptycznych (tj. torusach ze strukturą zespoloną $\mathbf{C}/\Lambda$, gdzie Λ jest kratą). Pokazać, że znajomość struktury Hodge'a w $H^1(E)$ pozwala odtworzyć E.

-?- Niech X będzie zwartą powierzchnią Kählerowską. Oznaczmy przez I strukturę zespoloną w T_xX. Załóżmy, że istnieje nigdzie nie znikająca holomorficzna forma $\theta \in \Omega^2(X)$. Niech $\omega_J = re(\theta)$ oraz $\omega_K = im(\theta)$. Czy te formy pochodzą od struktur niemal zespolonych J, K takich, że I, J, K spełniają relacje $K = IJ = -JI$?

** Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a A podzbiorem domkniętym. Zinterpretować długi ciąg dokładny kohomologi pary (X, A) w języku snopów na X.

** Niech X będzie rozmaitością, a A podzbiorem domkniętym i brzegowym. Zinterpretować dlugi ciąg dokładny homologi pary (X, A) w języku hiperkohomologii snopów na X.
Wskazówka: Rozważyć kompleks snopów $F^\bullet = A^\bullet_X / A^\bullet_{X-A}$, gdzie $i : X - A \to X$ jest włożeniem.

** *(Pochodny) obraz prosty.* Obraz prosty definiujemy tak: $f_*(\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)$ dla $U \subset Y$. (Sprawdzić, że to jest snop!) Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem rozmaitości. Obliczyć źdźbła obrazu prostego snopa stałego $(f_*\mathbf{R}_X)_y$ oraz źdźbło kohomologi kompleksu snopów $(f_*A^\bullet_X)_y$. Przyjżeć się uważniej przypadkowi gdy:
a) f jest rozwłóknieniem,
b) w szczególności, gdy f jest nakryciem, np. $S^1 \to S^1$,
c) $X = (\mathbf{C}^*)^2$, $Y = \mathbf{C}^2$ a f jest włożeniem.

** *Snop orientacji.* Dla snopa $\mathcal{F}$ definiujemy obraz prosty ze zwartymi nośnikami:

$$f_!\mathcal{F}(U) \subset f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

składa się z przekrojów s, takich, że $f_{|supp(s)} : supp(s) \to U$ jest właściwe. (Sprawdzić, że to jest snop!) Niech X będzie rozmaitością wymiaru n. Snop orientacji definiujemy jako $Or_X = H^n(p_!(A^\bullet_{TX}))$, gdzie $p : TX \to X$ jest rzutowaniem. Udowodnić, że Or_X jest systemem współczynników (snopem lokalnie stałym) o źdźble izomorficznym z $\mathbf{R}$. Od jakiej reprezentacji $\pi_1(X)$ pochodzi? Podać inne, definicje Or_X. Sprawdzić, że pozostałe snopy kohomologi $H^i(p_!(A^\bullet_{TX}))$ dla $i \neq n$ są zerowe.

** Udowodnić dualność Poincaré dla rozmaitości nieorientowalnych: skonstruować niezdegenerowaną formę 2-liniową (pairing)

$$H^k_c(X; \mathbf{R}) \times H^{n-k}(X; Or_X) \to \mathbf{R}\,,$$

ogólniej dla dowolnego systemu współczynników (snopa lokalnie stałego) A

$$H^k_c(X; A) \times H^{n-k}(X; A^\vee \otimes Or_X) \to \mathbf{R}\,,$$

$$H^k(X; A) \times H^{n-k}_c(X; A^\vee \otimes Or_X) \to \mathbf{R}\,,$$

(Porównaj z dualnością Serre'a.)
– Pokazać, że powierzchnia Hopfa $(\mathbf{C}^2 - \{0\})/e^{\mathbf{Z}}$ nie jest rozmaitością kählerowską. (Grupa $e^{\mathbf{Z}}$ jest podgrupą $\mathbf{C}^*$ działającą po współrzędnych.)

** Opisać strukturę Hodge'a w kohomologiach $\mathbf{P}^n$, grassmanianów, przestrzeni flag. Wskazówka: klasa w kohomologiach, która jest dualna do cyklu reprezentowanego przez podzbiór analityczny należy do

$$H^{k,k}(X) \cap im(H^{2k}(X; \mathbf{Z}) \subset H^{2k}(X; \mathbf{C})\,.$$

** *Formalność kohomologi zwartej rozmaitości kählerowskiej X.* Pokazać, że istnieje CDGA $B^\bullet$ oraz kwaziizomorfizmy algebr $A^\bullet(X) \leftarrow B^\bullet \to H^*(X)$. (Wyjaśnienia: CDGA = algebra przemienna z gradacją i różniczką, $H^*(X)$ jest CDGA z zerową różniczką, *kwaziizomorfizm* = przekształcenie łańcuchowe indukujące izomorfizm na kohomologiach.)

Wsk. $B^\bullet = ker\, d^c$ [Huybrechts, §3.A].

** *Dualność Serre'a.* Niech X będzie zwartą rozmaitością zespoloną wymiaru n oraz E holomorficzną wiązką wektorową. Udowodnić

$$H^k(X;\underline{E}) \simeq H^{n-k}(X;\underline{E}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^n_X)^\vee\ .$$

(Porównać z dualnością Poincaré dla rozmaitości nieorientowalnych [ostatnie zadanie o snopach].)

** Pokazać, że formy holomorficzne $\Omega^p(X)$ na zwartej rozmaitości Kählerowskiej są harmoniczne ze względu na dowolną metrykę kählerowską. W szczególności są ∂-zamknięte, a klasa takiej formy w $H^*(X)$ jest zerowa wtedy i tylko wtedy gdy forma jest zerowa.

– Niech X będzie zwartą rozmaitością Kählerowską,

$$H_{\mathbf{Z}} = H^1(X;\mathbf{Z})/Torsja\,, \qquad H_{\mathbf{C}} = H_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{C} = H^1(X;\mathbf{C}) = H^{1,0} \oplus H^{0,1}\,.$$

Udowodnić, że
1) rzut $H_{\mathbf{Z}}$ na $H^{1,0}$ jest kratą (tzn. podgrupą dyskretną maksymalnej rangi);
2) anihilator $H_{\mathbf{Z}}$ w $(H^{1,0})^\vee$ jest kratą.

– Opisać strukturę Hodge'a w kohomologiach powierzchni K3 (gdy wiązka $\Lambda^2 TX$ jest trywialna i X jest jednospójna.) Trzeba użyć twierdzenie Hirzebrucha o sygnaturze, formułę Noether i formułę Wu, więc jest to zadanie dla wtajemniczonych [Barth-Hulek-Chris-Van de Ven, Compact complex surfaces, §VIII.3].

– Dana rozmaitość zespolona X i gładka hiperpowierzchnia Y zadana przez funkcję f. Niech $\alpha \in A^\bullet(X-Y)$ będzie zamkniętą C^∞ formą różniczkową taką, że $f\alpha$ jest gładka na X. Udowodnić, że α jest przekrojem $A^\bullet_X(log Y)$.

– Dana rozmaitość zespolona X, gładka hiperpowierzchnia Y, cykl $\xi \subset Y$ oraz forma zamknięta $\alpha \in A^\bullet_X(log Y)$. Wykazać, że $\int_\xi res\,\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta(\xi)}\alpha$, gdzie $\delta(\xi)$ jest wiązką okręgów nad ξ zawartą w brzegu otoczenia tubularnego Y w X.

– Niech $X \subset \mathbf{CP}^2$ będzie zadane wzorem $z_0 z_3^2 = z_1^3 + z_1^2 z_0$. (Parametryzacja $[s^3 : s(t^2-t^2) : t(t^2 - s^2)]$.) Przedstawić X jako push-out diagramu rozmaitości gładkich i prześledzić jak wygąda ciąg dokładny obliczający kohomologie X z punktu widzenia teorii Hodge'a.