ZADANIA NA EGZAMIN
Z TOPOLOGII ROZMAITOŚCI ZESPOLONYCH I TEORII HODGE'A

Rozmaitość kählerowska := kählerowska i zwarta.

•**1.** Odróżnić, które z poniższych zadań są trudne, które rachunkowe, a które trywialne.

•**2.** Udowodnić dualność Poincaré dla rozmaitości nieorientowalnych: Przez Or_X oznaczamy snop orientacji (skonstruować go). Zbudować niezdegenerowaną formę 2-liniową

$$H^k_c(X;\mathbf{R})\times H^{n-k}(X;Or_X)\to\mathbf{R}\,.$$

Ogólniej dla dowolnego systemu współczynników (snopa lokalnie stałego) A

$$H^k_c(X;A)\times H^{n-k}(X;A^\vee\otimes Or_X)\to\mathbf{R}\,.$$

•**3.** Udowodnić, że wszystkie gładkie hiperpowierzchnie ustalonego stopnia w przestrzeni rzutowej są dyfeomorficzne.

•**4.** Rozważamy pęk Lefschetza. Udowodnić, że wymiar przestrzeni cykli znikających jest **nie większy** od stopniowa rozmaitości dualnej lub jest równy zero gdy rozmaitość dualna nie jest hiperpowierzchnią.

•**5.** Opisać pęk Lefschetza w wybranym przez siebie nietrywialnym przykładzie (np. $X=$ kwadryka w $\mathbf{CP}^4$ lub $X=\mathbf{CP}^2$ zanurzona poprzez odwzorowanie Veronese itp.). Opisać cykle niezmiennicze, znikające, monodromię.

•**6.** Podać przykład $X\subset\mathbf{CP}^n$ takiej, że rozmaitość dualna nie jest hiperpowierzchnią.

•**7.** Niech X będzie nierozkładalną hiperpowierzchnią w $\mathbf{CP}^n$, a L prostą transwersalna do X. Wykazać, że $\pi_1(L-X)\to\pi_1(\mathbf{CP}^n-X)$ jest epimorfizmem.

•**8.** Niech X będzie nierozkładalną hiperpowierzchnią w $\mathbf{CP}^n$, a L prostą transwersalna do X. W grupie podstawowej $\pi_1(L-X)$ wybieramy generatory – pętle polegające na obchodzieniu pojedyńczych punktów $L\cap X$. Udowodnić, że te generatory są sprzężone w $\pi_1(\mathbf{CP}^n-X)$.

•**9.** Czy trudne twierdzenie Lefschetza jest prawdziwe dla kohomologi o współczynnikach w $\mathbf{Z}$?

•**10.** Do jakiego faktu sprowadza się trudne twierdzenie Lefschetza dla krzywych? Co otrzymujemy dla powierzchni?

•**11.** Wykazać, że trudne twierdzenie Lefschetza jest równoważne temu, że dla każdego $k\le n$ forma kwadratowa w $H^k(X)$ określona wzorem $Q(x,y)=\int_X x\cap y\cap\omega^{n-k}$ jest niezdegenerowana (tu $n=\dim X$, ω–forma kählerowska).

•**12.** Wyliczyć postać Laplasjanu dla form na $\mathbf{R}^n$ z metryką euklidesową.

•**13.** Opisać formy harmoniczne na $\mathbf{R}^n/\Lambda$, gdzie Λ-jest kratą, a metryka jest euklidesowa.

•**14.** Niech V będzie zespoloną przestrzenią liniową z iloczynem hermitowskim. Sprawdzić, że gwiazdka Hodge'a działa $*:\Lambda^{p,q}V^\vee_{\mathbf{C}}\to\Lambda^{n-q,n-p}V^\vee_{\mathbf{C}}$ i jest izometrią.

•**15.** Niech V będzie zespoloną przestrzenią liniową z iloczynem hermitowskim. Z części rzeczywistej iloczynu hermitowskiego konstruujemy formę objętości vol. Ponadto mamy formę symplektyczną ω. Wykazać, że $\omega^n=n!\,vol$, gdzie $n=\dim V$.

•**16.** Wykazać, że forma kählerowska jest harmoniczna.

•**17.** Kohomologie Botta-Cherna rozmaitości zespolonej X definiujemy jako $H^{p,q}_{BC}(X)=\frac{A^{p,q}(X)\cap ker\,d}{\partial\bar\partial A^{p-1,q-1}(X)}$. Wskazać naturalne odwzorowania z $H^{p,q}_{BC}(X)$ do $H^q(X;\Omega^p_X)$ i do $H^{p,q}(X;\mathbf{C})$. Wykazać, że pierwszy z nich jest izomorfizmem, a drugi włożeniem na $H^{p,q}(X)\subset H^{p+q}(X;\mathbf{C})$ gdy X jest kählerowską rozmaitością.

•**18.** Niech X będzie rozmaitością kählerowską, a V niepustym podzbiorem analitycznym. Wykazać, że klasa $[V]\in H_*(X)$ jest niezerowa. Podać kontrprzykład ze zwartą, ale nie kählerowską X.

•**19.** Sprawdzić, że przestrzeń elementów prymitywnych $P^k(X)$ dla rozmaitości kählerowskiej rozpada się na (p,q)-typy.

•**20.** Pokazać, że formy holomorficzne $\Omega^p(X)$ na zwartej rozmaitości Kählerowskiej są harmoniczne ze względu na dowolną metrykę kählerowską. W szczególności są ∂-zamknięte, a klasa takiej formy w $H^*(X)$ jest zerowa wtedy i tylko wtedy gdy forma jest zerowa.

•21. Znając wymiary $H^{p,q}(X)$ kählerowskiej powierzchni (lub rozmaitości wyższego wymiaru) podać wzór na sygnaturę X.

•22. Udowodnić, że suma spójna $\mathbf{CP}^2\#\mathbf{CP}^2$ nie może być rozmaitością kählerowską.

•23. Niech C będzie zwartą krzywą zespoloną. Mamy ciąg dokładny snopów $0 \to \mathbf{C} \to \Omega^0_C \xrightarrow{d} \Omega^1_C \to 0$. Co można powiedzieć o długim ciągu kohomologii?

•24. Niech S będzie zwartą powierzchnią zespoloną. Wykazać, że 1) $H^0(X;\Omega^2_X)$ odwzorowuje się w $H^2(X;\mathbf{C})$ różnowartościowo, 2) holomorficzne 1-formy są zamknięte. Co można powiedzieć o ciągu spektralnym Hodge-to-deRham? [Vosin I, str. 214, ćw. 1]

•25. Pokazać, że istnieje CDGA $B^\bullet$ oraz kwaziizomorfizmy algebr $A^\bullet(X) \leftarrow B^\bullet \to H^*(X)$. (Wyjaśnienia: CDGA = algebra przemienna z gradacją i różniczką, $H^*(X)$ jest CDGA z zerową różniczką.)
Wskazówka: $B^\bullet = ker\, d^c$ [Huybrechts, §3.A].

•26. Niech $X \subset \mathbf{CP}^N$ będzie rozmaitością rzutową, na której działa algebraicznie $\mathbf{C}^*$. Definiujemy $Y = \big((\mathbf{C}^{M+1} - \{0\}) \times X\big)/\mathbf{C}^*$ (iloraz przez działanie diagonalne). Wykazać, że addytywnie $H^*(Y) \simeq H^*(X) \otimes H^*(\mathbf{CP}^M)$.

•27. Niech E będzie krzywą trzeciego stopnia w $\mathbf{CP}^2$. Jak wygląda mieszana struktura Hogde'a w $H^*(\mathbf{CP}^2 - E)$.

•28. Niech $X \subset \mathbf{CP}^2$ będzie zadane wzorem $z_0z_1z_2 = 0$. Jak wygląda mieszana struktura Hogde'a w $H^*(X)$.

•29. Dana rozmaitość zespolona X i gładka hiperpowierzchnia Y zadana przez funkcję f. Niech $\alpha \in A^\bullet(X - Y)$ będzie zamkniętą C^∞ formą różniczkową taką, że $f\alpha$ jest gładka na X. Udowodnić, że α jest przekrojem $A^\bullet_X(logY)$.

Zadania wymagające dodatkowych wiadomości, których nie mogę wymagać na egzaminie.

•30. Dla $X \subset \mathbf{CP}^N$ oznaczamy przez $CX^* \subset \mathbf{C}^{N+1}$ stożek afiniczny nad X z wyrzuconym wierzchołkiem. Załóżmy, że X jest zwartą podrozmaitością. Znając rozkład Lefschetza w $H^*(X)$ podać formułę na $H^*(CX^*)$. Wskazówka: zastosować ciąg Gysina rozwłoknienia $\mathbf{C}^* \to CX^* \to X$.

•31. Niech $X \subset Y \subset \mathbf{CP}^N$ będzie parą zwartych podrozmaitości, $\dim X = n$, $\dim Y = n-1$. Udowodnić, że przekształcenie indukowane przez włożenie $H^n(CX^*) \to H^n(CY^*)$ jest zerowe. Wskazówka: porównać ciągi Gysina dla X i Y.

•32. Opisać mieszaną strukturę Hodge'a dla CX^* i dla $\overline{CX} \subset \mathbf{CP}^{N+1}$.

•33. Obliczyć liczby Bettiego gładkiej hiperpowierzchni stopnia d w $\mathbf{CP}^n$, stopnia (d_1, d_2) w $\mathbf{CP}^{n_1} \times \mathbf{CP}^{n_2}$, ... itd.

•34. Obliczyć $H^{p,q}(Q)$ dla kwadryki $Q \subset \mathbf{CP}^{n+1}$.

•35. Niech L będzie holomorficzną wiązką liniową nad kählerowską X. Pokazać, że $c_1(L) \in H^{1,1}(X)$.

•36. Wykazać, że każda wiązka liniowa na $\mathbf{CP}^n$ może być wyposażona w strukturę zespoloną.

•37. Dana zespolona wiązka wektorowa E nad CW-kompleksem X. Oznaczamy przez $Y = Gr_k(E)$ wiązkę Grassmanianów przestrzeni k-wymiarowych w E. Znając $\dim H^*(X)$ podać $\dim H^*(Y)$.