ZADANIA DLA UCZESTNIKÓW SEMINARIUM
Z TOPOLOGII ALGEBRAICZNEJ 2003/2004

1 Algebra liniowa, czasem z gradacją

1.1 Jeśli V na rzeczywistej przestrzeni liniowej zadany jest operator $J : V \to V$ taki, że $J^2 = -1$, to V ma naturalną strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathbf{C}$ (w szczególności $\dim_{\mathbf{R}} V = 2k$).

1.2 Orientacja przestrzeni zespolonej. Na każdej zespolonej przestrzeni liniowej V, traktowanej jako przestrzeń rzeczywista, można zadać naturalną orientację o_V taką, że dla dowolnego izomorfizmu zespolonego $f : V \to W$ zachodzi $f(o_V) = o_W$.

1.3 Algebra wolna (tensorowa) jako funktor dołączony. Niech A/k oznacza kategorię algebr z 1 (niekoniecznie przemiennych) nad ciałem k a $F : \mathrm{A}/k \to \mathrm{Vect}_k$ będzie funktorem zapominania o wartościach w kategorii przestrzeni wektorowych. Istnieje funktor algebry tensorowej $T : \mathrm{Vect}_k \to \mathrm{A}/k$, który jest dołączony z prawej strony do F tzn. taki, że

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/k}(T(V), A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}_k}(V, F(A)).$$

Sformułować podobny wynik zastępując A/k kategorią algebr z gradacją GA/k oraz kategorię Vect_k kategorią przestrzeni wektorowych z gradacją Vect_k^*.

1.4 Algebra symetryczna jako funktor dołączony. Niech CA/k oznacza kategorię przemiennych algebr a $F' : \mathrm{CA}/k \to \mathrm{Vect}_k$ będzie funktorem zapominania o wartościach w kategorii przestrzeni wektorowych. Istnieje funktor $S : \mathrm{Vect}_k \to \mathrm{CA}/k$ dołączony z prawej strony do F' tzn. taki, że

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{CA}/k}(S(V), A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}_k}(V, F'(A)) \,.$$

Sformułować podobny wynik dla algebr i przestrzeni wektorowych z gradacją.

1.5 Algebra zewnętrzna jako funktor dołączony. Niech CGA/k oznacza kategorię antyprzemiennych (tzn. przemiennych z gradacją) algebr z gradacją nad k a $F^1 : \mathrm{CGA}/k \to \mathrm{Vect}_k$ będzie funktorem zapominania o wartościach w kategorii przestrzeni wektorowych danym wzorem $F^1(A) := A^1$. Istnieje funktor $\Lambda^* : \mathrm{Vect}_k \to \mathrm{CGA}/k$ dołączony z prawej strony do F^1 tzn. taki, że

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{CGA}/k}(\Lambda^*(V), A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}_k}(V, F^1(A)).$$

1.6 Wolna CGA generowana przez przestrzeń z gradacją. Niech $F^* : \mathrm{CGA} \to \mathrm{Vect}_k^*$ będzie funktorem zapominania o wartościach w kategorii przestrzeni wektorowych z gradacją. Istnieje funktor $U^* : \mathrm{Vect}_k^* \to \mathrm{CGA}$ dołączony z prawej strony do F^* tzn. taki, że

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{CGA}}(U^*(V), A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}_k^*}(V, F^*(A)).$$

1.7 Algebra zewnętrzna jako tensory antysymetryczne. Niech k będzie dowolnym ciałem charakterystyki różnej od 2. Dana jest przestrzeń wektorowa nad k, $\dim V = n < \infty$. Rozważamy działanie Σ_i na potędze tensorowej $V^{\otimes i}$

$$\sigma(v_1 \otimes \dots v_k) = sgn(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)} \,.$$

Wykazać, że $\Lambda^*(V) \simeq (V^{\otimes i})^{\Sigma_i} \subset V^{\otimes i}$. Gdy $char\, k = 0$ zdefiniować rzutowanie $V^{\otimes i} \to \Lambda^i(V)$ – zwane operatorem antysymetryzacji. Czy jest on homomorfizmem algebr?

1.8 Wykazać, że na kategorii skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych istnieje naturalny izomorfizm (tzn. naturalna równoważność funktorów) $(V^{\otimes i})^{\Sigma_i} \simeq (V^{\otimes i})/\Sigma_i$ jest izomorfizmem (iloraz $(V^{\otimes i})/\Sigma_i$ oznacza przestrzeń ko-niezmienników działania Σ_i na $V^{\otimes i}$).

1.9 Załóżmy, że $char\, k = 0$ lub $char\, k > i$. Wykazać, że złożenie włożenia i projekcji $(V^{\otimes i})^{\Sigma_i} \subset V^{\otimes i} \to (V^{\otimes i})/\Sigma_i$ jest izomorfizmem.

1.10 Potęga zewnętrzna i przestrzeń sprzężona. Wykazać, że na kategorii skończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych istnieje naturalny izomorfizm (tzn. naturalna równoważność funktorów) $\Lambda^i(V^*) \simeq (\Lambda^i V)^*$. Wykazać, że homomorfizm $\phi : \Lambda^i(V^*) \to \Lambda^{n-i}(V) \otimes \Lambda^n(V^*)$ dołączony do mnożenia zewnętrznego $\wedge : \Lambda^i(V^*) \times \Lambda^{n-i}(V^*) \to \Lambda^n(V^*)$, jest naturalnym izomorfizmem.

1.11 Suma prosta w kategorii algebr. Sprawdzić, że w kategorii algebr A/k kategoryjna suma prosta jest iloczynem tensorowym algebr. Przenieść ten wynik na kategorię algebr przemiennych, algebr z gradacją i antyprzemiennych algebr z gradacją.

1.12 Iloczyn tensorowy i Hom w kategorii kompleksów łańcuchowych. Niech C_* będzie kategorią kompleksów łancuchowych. Dla zdefiniować funktory dwóch argumentów, uogólniające zwykły funktor Hom i iloczyn tensorowy: $\otimes, \mathrm{Hom} : \mathrm{C}_* \times \mathrm{C}_* \to \mathrm{C}_*$ takie, że istnieje naturalna równoważność

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}_*}(A_* \otimes B_*, D_*) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}_*}(A_*, \mathrm{Hom}\,(B_*, D_*)).$$

1.13 Wolna CDGA generowana przez algebrę przemienną. Niech $C^\bullet$ będzie przemienną algebrą (nad k) z gradacją i z różniczką stopnia $+1$ spełniającą regułę Leibniza. Mówimy wtedy, że $C^\bullet$ jest przemienną algebrą z gradacją i różniczką. Kategorię takich algebr i ich homomorfizmów oznaczamy CDGA/k. Niech $F^0 : \mathrm{CDGA}/k \to \mathrm{CA}/k$ będzie funktorem zapominania prowadzącym do algebr przemiennych $F^0(C^\bullet) = C^0$. Wykazać, że F^0 ma funktor dołączony z lewej strony Ω tzn. taki, że :

$$Hom_{\mathrm{CA}/k}(A, F^0(C^\bullet)) = Hom_{\mathrm{CDGA}/k}(\Omega(A), C^\bullet).$$

Pokazać, że $\Omega(A)$ jest A-algebrą generowaną przez symbole $da \in (\Omega(A))^1$ dla $a \in A$ z relacjami generowanymi przez $d(a+b) = da + db$, $d(ab) = (da)b + a(db)$, oraz $dc = 0$ dla $c \in k \subset A$.

1.14 Wykazać, że kohomologie przemiennej algebry z gradacją i różniczką $H^*(C^\bullet)$ są przemienną algebrą z gradacją (mnożenie jest indukowane mnożeniem w $C^\bullet$.)

1.15 Algebry z gradacją i różniczką (CDGA) i formy różniczkowe Niech M będzie rozmaitoście gładką. Pokazać, że algebra form różniczkowych $\Omega^\bullet(M)$ jest izomorficzna z algebrą wolną $\Omega(C^\infty(M))$ generowaną przez algebrę funkcji gładkich $C^\infty(M)$

1.16 Teoria Hodge'a Niech będzie dany

- kompleks przestrzeni wektorowych skończonego wymiaru
$$0 \xrightarrow{d} V^0 \xrightarrow{d} V^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} V^{n-1} \xrightarrow{d} V^n \xrightarrow{d} 0\,;$$
- izomorfizm $* : V^k \longrightarrow V^{n-k}$;
- formy dwuliniowe $\int : V^k \times V^{n-k} \to \mathbf{R}$ takie, że $\langle x, y\rangle = \int(x, *y)$ jest iloczynem skalarnym oraz $\int(dx, y) + (-1)^k \int(x, dy) = 0$ dla $x \in V^k$, $y \in V^{n-k-1}$.

Zdefiniować formy harmoniczne, udowodnić rozkład Hodge'a i udowodnić, że w każdej klasie kohomologii jest dokładnie jedna forma harmoniczna. Sformułować i wykazać dualność Poincar'ego.

Słownik oznaczeń

- V^* – przestrzeń sprzężona,
- $\Lambda^k(V^*)$ utożsamiamy z antysymetrycznymi formami k -liniowymi na V.

  Dla rozmaitości M:
- T_xM dla $x \in M$ – przestrzeń styczna, TM – wiązka styczna,
- Λ^kTM – k-ta potęga zewnętrzna wiązki stycznej,
- ΓTM – pola wektorowe, czyli przekroje wiązki stycznej,
- $\Gamma\Lambda^kTM$ – przekroje wiązki Λ^kTM.
- T_x^*M dla $x \in M$ – przestrzeń kostyczna, T^*M – wiązka kostyczna,
- Λ^kT^*M – k-ta potęga zewnętrzna wiązki kostycznej,
- $\Omega^k(M)$ – przekroje wiązki $\Lambda^k(T^*M)$, tzn formy różniczkowe stopnia k.
- $\Omega^k(M)$ – przekroje wiązki $\Lambda^k(T^*M)$ o zwartych nośnikach, tzn formy różniczkowe o zwartych nośnikach stopnia k.
- $H^*(M)$ pierścień kohomologii de Rhama tzn kohomologie kompleksu $\Omega^*(M)$
- $H_c^*(M)$ pierścień kohomologii de Rhama o zwartych nośnikach; tzn kohomologie kompleksu $\Omega_c^*(M)$

2 Rozmaitości gładkie i analityczne

2.1 Niech $f : M \to N$ będzie odwzorowaniem właściwym rozmaitości gładkich. Jeśli f jest submersją, to f jest lokalnie trywialne (w kategorii gładkiej, ale nie analitycznej, nawet jeśli przekształcenie jest analityczne!).

2.2 Niech $f : M \to N$ będzie właściwym holomorficznym odwzorowaniem rozmaitości zespolonych. Załóżmy, że N jest spójna. Wykazać, że jeśli p i q są wartościami regularnymi f, to $f^{-1}(p)$ i $f^{-1}(q)$ są dyfeomorficzne (nie koniecznie holomorficznie równoważne).

2.3 Niech grupa dyskretna G działa na rozmaitości topologicznej M w sposób właściwie nieciągły (tzn. taki, że $M \to M/G$ jest nakryciem z włóknem G). Wykazać, że

a) Jeśli M jest gładka (odp. analityczna) a działanie jest gładkie (odp. analityczne), to projekcja M/G ma strukturę gładką (odp. analityczną) a $p : M \to M/G$ jest lokalnym dyfeomorfizmem.

b) Jeśli M jest gładka i zorientowana, a działanie G zachowuje orientację, to M/G posiada naturalną orientację.

2.4 Jeśli $p : \widetilde{M} \to M$ jest nakryciem nad rozmaitością gładką (odp. zorientowana, analityczną) to $\widetilde{M}$ jest także rozmaitością gładką (odp. zorientowana, analityczną).

2.5 Dla dowolnej rozmaitości istnieje nakrycie dwukrotne rozmaitością orientowalną.

2.6 Znaleźć dla rozmaitości gładkiej wymiaru n (bez dodatkowych struktur) naturalne utożsamienie $\Omega^k(M) \simeq \Gamma\Lambda^{n-k}TM \otimes \Omega^n(M)$.

3 Kohomologie deRhama

3.1 Znaleźć zamkniętą formę różniczkową generującą $H^{n-1}(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$.

3.2 Niech $[\alpha] \in H^k(M)$ oraz $A \subset M$ będzie dostatecznie regularnym podzbiorem (np.podrozmaitością) wymiaru mniejszego niż k. Pokazać, że istnieje forma $\alpha' \in [\alpha]$ taka, że $\overline{\mathrm{supp}(\omega)} \cap A = \emptyset$)

3.3 Udowodnić, że $H^1(M) = \mathrm{Hom}\,(\pi_1(M), \mathbf{R})$.

3.4 Kohomologie i orientowalność Dla zwartej i spójnej rozmaitości M wymiaru n następujące warunki są równoważne: 1) M jest orientowalna; 2) $H^n(M) \neq 0$; 3) $H^n(M) \simeq \mathbf{R}$.

3.5 Homomorfizm transferu dla działań grup. Niech grupa skończona G działa na rozmaitości M w sposób wolny. Wtedy istnieje homomorfizm transferu $p_! : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M/G)$ taki, że $p_! \circ p^* = |G|$ oraz $p^* \circ p_! = \sum_{g \in G} g^*$. Wywnioskować stąd, że odwzorowanie $p : M \to M/G$ indukuje izomorfizm $p^* : H^*(M/G) \to H^*(M)^G \subset H^*(M)$.

3.6 Kohomologie w wymiarze rozmaitości. Niech M będzie spójną rozmaitością wymiaru n. Wykazać, że jeśli M jest zwarta i orientowalna to $H^n(M) = \mathbf{R}$, natomiast w przeciwnym przypadku $H^n(M) = 0$.

3.7 Kohomologie sumy spójnej. Opisać algebrę kohomologii sumy spójnej dwóch rozmaitości zorientowanych $H^*(M\#N)$. Obliczyć algebrę kohomologii 2-wymiarowych precli.

3.8 Formy harmoniczne na powierzchniach. Znaleźć formy harmoniczne na sferze, torusie, przestrzeni rzutowej.

4 Kohomologie deRhama ze zwartymi nośnikami

4.1 Obliczyć $H^0_c(M)$ w zależności od własności rozmaitości M. Zauważyć, że rozmaitość M jest zwarta wtedy i tylko wtedy gdy $H^*_c(M) \simeq H^*(M)$.

4.2 Wykazać izomorfizm $H^k_c(\mathbf{R}^n) \simeq H^k(S^n)$ dla $k > 0$.

4.3 Niech $N \subset M$ będzie domkniętą podrozmaitością w zwartej rozmaitości M. Wtedy istnieje długi ciąg dokładny

$$.. \longrightarrow H^q_c(M \setminus N) \longrightarrow H^q(M) \longrightarrow H^q(N) \longrightarrow H^{q+1}_c(M \setminus N) \longrightarrow ...$$