## SERIA I

1. Czy kwadrat na płaszczyźnie jest dyfeomorficzny z kołem?

2. Dana jest funkcja $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$:

$$\phi(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y) \ .$$

Czy $\phi$ jest dyfeomorfizmem? Czy $\phi$ jest lokalnym dyfeomorfizmem?

3. Znaleźć parametryzację i równanie wielomianowe torusa.

4. Znaleźć parametryzację sfery.

5. Dana jest powierzchnia (hiperboloida jednopowłokowa) powstała przez obrót prostej $(1, t, t)$ wokół osi $z$-tow. Podać jej równanie.

6. Sprobować opisać równaniem wielomianowym obraz funkacji

$$\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \,, \qquad \phi(x, y) = \left(x, xy, y^2\right) \ .$$

## SERIA II

1. Dana jest funkcja $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$:
a) $\phi(x, y) = \left(x^2, y^2, (x + y + 1)^2\right)$
b) $\phi(x, y) = \left(x, xy, y^2\right)$.
W jakich punktach $\phi$ jest immersją?

2. Czy jest submersją funkcja $\phi : \mathbf{R}^2 \setminus \{0, 0\} \to \mathbf{R}^2$:

$$\phi(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right) ?$$

3. Udowodnić, że $M \subset \mathbf{R}^n$ jest podrozmaitośćią $m$–wymiarową wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in M$ istnieje otoczenie $U \subset \mathbf{R}^n$, $x \in U$ oraz submersja $f : U \to \mathbf{R}^{n-m}$ taka, że $U \cap M = f^{-1}(0)$.

4. Wykazać, że jest podrozmaitością zbiór:
a) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ y^2 = x^2 z\}$
b) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ xy + yz + xz = -1, \ xyz = 1\}$.

5. Wykazać, że są podrozmaitościami

$$SL(n) \subset \mathbf{R}^{n^2} \quad \text{i} \quad O(n) \subset \mathbf{R}^{n^2} .$$

6. Podać przykład submersji $\mathbf{R}^2$ na $\mathbf{R}^2$ ale nie dyfeomorfizmu.

7. Podać przykład immersji $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}^2$ takiej by obraz nie był podrozmaitością.

8. Dana jest krzywa (cykloida) o parametryzacji:

$$(t - \sin t, 1 - \cos t) \ .$$

Udowodnić, że nie jest ona podrozmaitością.

## SERIA III

1. Wykazać, że zbiór $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ x^4 + y^4 = 1\}$ jest dyfeomorficzny z okręgiem.

1'. Wykazać, że zbiór

$$\{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbf{R}^n : \ x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 = 1\}$$

jest dyfeomorficzny ze sferą $S^{n-1}$.

$$S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbf{R}^n : \ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1\} .$$

2. Podać równanie prostej równoległej do prostej $x = y$ i stycznej do krzywej:

$$\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 2x^2 - 4y^2 = 1\right\} .$$

3. Dana jest powierzchnia $xy + yz + xz = 27$ Napisać równanie płaszczyzny stycznej do tej powierzchni, która jest równoległa do powierzchni przechodzącej przez punkty $(17, 0, 0)$, $(0, 17, 0)$, $(0, 0, 17)$.

3'. Dana jest powierzchnia $xy - yz - xz = 12$. Napisać równanie płaszczyzny stycznej do tej powierzchni, która jest równoległa do powierzchni przechodzącej przez punkty $(31, 0, 0)$, $(0, 31, 0)$, $(0, 0, 31)$.

4. Dana jest powierzchnia $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ oraz prosta $L = \{(t, t, 2t) : t \in \mathbf{R}\}$. Wykazać, że zbiór punktów, w których styczna do powierzchni jest równoległa do $L$ jest elipsą.

4'. Dana jest powierzchnia $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ oraz prosta $L = \{(t, t, 3t) : t \in \mathbf{R}\}$. Wykazać, że zbiór punktów, w których styczna do powierzchni jest równoległa do $L$ jest hiperbolą.

5. Dana jest krzywa $K \subset \mathbf{R}^3$ zadana parametrycznie $(a \cos t, a \sin t, b\,t)$. Konstrujemy nową krzywą: przez każdy punkt krzywej $K$ prowadzimy styczną i znajdujemy na niej punkt najbliższy początku układu współrzędnych. Zbiór tych punktów tworzy nową krzywą. Udowodnić, że spełnia ona równanie: $\frac{1}{a^2}(x^2 + y^2) - \frac{b^2}{a^4} z^2 = 1\,.$

6. Opisać płaszczyznę styczną do torusa.

7. Niech $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ \sqrt{|z|} = x^2 + y^2 + 1\}$. Wykazać, że $M$ jest podrozmaitością. Czy istnieją takie dwa puntky w $M$, w których płaszczyzny styczne (afiniczne) są równe?

8. Znaleźć parametryzację paraboloidy hiperbolicznej $z = x^2 - y^2$ tak, żeby linie współrzędnych były tworzącymi (prostymi).

9. Wykazać, że wszystkie płaszczyzny styczne do powierzchni $z = x\phi(\frac{y}{x})$, gdzie $\phi$ jest funkcją gładką, przechodząprzez punkt $(0, 0, 0)$.

## SERIA IV

1. Krzywa Vivianiego powstaje w przecięciu sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i walca $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Znaleźć jej parametryzację, obliczyć kąt pod jakim przecinają się jej gałęzie w punkcie $(1, 0, 0)$.

2. Znaleźć parametryzację lemniskaty Bernouliego

$$\left((x-1)^2 + y^2\right)\left((x+1)^2 + y^2\right) = 1\,.$$

Przyjąć za parametr kąt jaki wektor $(x, y)$ tworzy z osią $x$–ów.

3. Obiczyć długość krzywych
a) $\gamma(t) = \left(t^2, 1-t, \frac{2}{3}t^3\right)\,, \quad t \in [1, 2]$,
b) spirali logarytmicznej: $s(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)\,, \quad t \in (-\infty, a]$,
c) asteroidy: $h(t) = (3\cos t + \cos 3t, 3\sin t - \sin 3t)$.

4. Znaleźć parametryzację łukową
a) spirali,
b) helisy kolowej: $(r\cos t, r\sin t, at)$,
c) spirali stożkowej: $(e^t \cos t, e^t \sin t, ae^t)$,
d) krzywej $(\cosh t, \sinh t, t)$.

5. Udowodnić, że kardioidy (zadane we współrzędnych biegunowych)

$$r = a(1 + \cos\phi) \qquad \text{i} \qquad r = a(1 - \cos\phi)$$

są ortogonalne.

6. Udowodnić, że asteroida spełnia równanie $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$.

7. Udowodnić, że długość odcinka stycznego do asteroidy zawartego między osiami jest stała.

# SERIA V

1. Udowodnić, że zbiór

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 :\ y^2 - zx^2 = 2\}$$

jest rozmaitością. Czy okrąg

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ y = z\}$$

jest styczny do $M$ w punkcie $(1, 2, 2)$.

2. Dana jest krzywa $\gamma(t)$ w $\mathbf{R}^3$. Wykazać, że jeśli istnieje niezerowy wektor $\alpha$ taki, że $\dot{\gamma}(t) \perp \alpha$ dla każdego $t$, to krzywa jest płaska.

3. Udowodnić, że jeśli proste normalne główne krzywej w $\mathbf{R}^3$ przecinają się w jednym punkcie, to ta krzywa jest okręgiem lub prostą.

4. Wykazać, że płaszczyzny normalne krzywej

$$\gamma(t) = (a \sin^2 t, \sqrt{2} a \sin t \cos t, a \cos^2 t)$$

przecinają się w punkcie $(0, 0, 0)$.

5. Wykazać, że wszystkie płaszczyzny normalne przecinają się w jednym punkcie $p$ wtedy i tylko wtedy, gdy krzywa leży na sferze o środku w $p$.

6. Znajdź wektor normalny główny, $\kappa$ i $\tau$ dla
a) $\gamma(t) = (1 - \cos t, t^2, 1 + \cos t)$,
b) helisy kolowej: $(r \cos t, r \sin t, at)$.
c) krzywej: $(\cosh t, \sinh t, t)$.

7. Znaleźć $\kappa$ i $\tau$ dla krzywej Vivianiego.

8. Wykazać, że następujące warunki są równoważne
a) proste styczne do krzywej tworzą stały kąt z pewnym kierunkiem,
b)proste binormalne krzywej tworzą stały kąt z pewnym kierunkiem,
c) proste normalne główne są równoległe do pewnej płaszczyzny,

d) $\frac{\kappa}{\tau}$ jest stałe.

## SERIA VI

1. Niech $\gamma(s)$ będzie parametryzacją łukową cykloidy

$$(x+\sin x, 1-\cos x)\,.$$

Wykazać, że $\vec{a}(s) = -s\,\vec{t}(s)$, gdzie $\vec{a}(s)$ jest rzutem wektora $(0,-1)$ na kirunek styczny.

2. Niech $\gamma(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t))$ będzie krzywą zadaną przez wielomiany stopnia 2. Wykazać, że $\gamma$ jest płaska.

3. Niech $\gamma(t)$ będzie krzywą zadaną równaniami $x^2 = 2az$, $y^2 = 2bz$. Czy $\gamma$ jest płaska?

4. Obliczyć zorientowaną krzywiznę cykloidy.

5. Dana jest krzywa o parametryzacji łukowej $\gamma(s)$ i krzywiźnie $\kappa(s)$ leżąca w płaszczyźnie $z = 0$. Obliczyć krzywiznę i skręcenie krzywej $(\gamma(s), s) \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$.

6. Znaleźć krzywą płaską o równaniu naturalnym

$$s^2 + \frac{1}{\kappa(s)^2} = 16a^2\,.$$

(cykloida)

7. Dana krzywa $\gamma(s)$ z parametryzacją naturalną. Znaleźć środki krzywizny krzywej $\sigma(s) = \gamma(s) - s\vec{t}(s)$.

8. Dana krzywa z parametryzacją naturalną. Znana jest jej krzywizna $\kappa_1(s)$ i skręcenie $\tau_1(s)$. Znaleźć krzywiznę i skręcenie krzywej $\sigma$, gdzie $\sigma(s) = \vec{t}(s)\,.$

SERIA VII

1. Znaleźć ewolutę i ewolwentę cykloidy. (To też są cykloidy.)

2. Znaleźć ewolutę i ewolwentę kardioidy. (To też są kardioidy.)

3. Wykazać, że loksodroma, t.j. krzywa na sferze o równaniu

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=e^{k\phi}, \qquad k=\text{const.},$$

(gdzie $\phi =$ długość geograficzna, $\theta =$ szerokość geograficzna) przecina wszystkie południki pod stałym kątem.

4. Udowodnić, że rzut poziomy ze sfery jednostkowej na pionowy walec o podstawie będącą jednostkowym okręgiem zachowyje pole powierzchni.

## SERIA VIII

1. Rozwarzamy rzut steograficzny $S^2 \setminus \{N\} \to \mathbf{R}^2 \times \{0\}$, gdzie $N = (0,0,1)$. Punktowi $P$ przyporządkowujemy przecięcie prostej $NP$ z płaszczyzną $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$. Udowodnić, że rzut stereograficzny zachowuje kąty.

2. Niech $S_1 \subset \mathbf{R}^3$ będzie wykresem funkcji $f(x,y) = x^2 + y^2$, a $S_2 \subset \mathbf{R}^3$ będzie wykresem funkcji $g(x,y) = 2xy$. Niech $p : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ będzie rzutem na dziedzinę. Wykazać, że dla dowolnego obszaru $U \subset \mathbf{R}^2$ pola powierzchni $p^{-1}(U) \cap S_1$ i $p^{-1}(U) \cap S_2$ są równe.

3. Opisać loksodromę na stożku $x^2 + y^2 = a^2x^2$ (t.j. krzywą przecinającą tworzące pod stałym kątem). Z naleźć jej rzut na płaszczyznę $x$, $y$.

4. Opisać pierwszą formę kwadratową
a) powierzchni obrotowej powstałej z krzywej $f(x) = y$ poprzez obrót wokół osi $x$–ów,
b) sfery,
c) torusa,
d) pseudosfery $r(u,v) = \left(a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos v\right)\right)$.

5. Pierwsza forma kwadratowa powierzchni jest $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$.
a) Obliczyć, pod jakim kątem przecinają się krzywe $u + v = 0$ i $u - v = 0$.
b) Obliczyć pole trójkąta utworzonego przez krzywe $u = \pm av$, $v = 1$.

6. Obliczyć pole powierzchni torusa.

7. Wykazać że katenoid
$$r(u,v) = \left(a \cosh \tfrac{u}{a} \cos v, a \cosh \tfrac{u}{a} \sin v, u\right)$$
oraz helikoid
$$s(u,v) = (u \cos v, u \sin V, av)$$
są wewnętrznie izometryczne.

8. Wykazać, że odwzorowanie powierzchni, które jest jednocześnie konforemne (zachowujące kąty) i wiernopowierzchniowe jest izometrią.

## SERIA IX

1. Powierzchnia $M$ dana jest równaniem $z = x^2 + xy^2$.
a) Obliczyć krzywiznę Gaussa i krzywiznę średnią.
b) Zbadać typy punktów na powierzchni.
c) Napisać równanie opisujące punkty sferyczne.

2. Niech $\gamma : (0,1) \to \mathbf{R}^2 \times \{0\}$ będzie parametryzacją łukową krzywej leżącej w płaszczyźnie $x, y$ o krzywiźnie $\kappa(s) < 1$. Niech $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{e}_3$ bedą wektorami trójnogu Freneta dla tej krzywej i niech

$$\Phi(u,v) = \gamma(u) + \cos v\,\vec{n}(u) + \sin v\,\vec{e}_3$$

będzie układem współrzędnych na powierzchni $M = \Phi((0,1) \times \mathbf{R})$.
a) Wyznaczyć na $M$ punkty paraboliczne, hiperboliczne i eliptyczne.
b) Niech $k(s_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Znaleźć krzywiznę Gaussa powierzchni $M$ w punkcie $\Phi(s_0, \frac{\pi}{4})$.

3. Znaleźć typy punktów na powierzchni

$$z = x^4 + y^4 + x^2y^2$$

4. Znaleźć punkty sferyczne na paraboloidzie eliptycznej.

5. Udowodnić, że punkt na powierzchni jest sferyczny wtedy i tylko wtedy gdy krzywizna Gaussa $K$ jest różna od 0 oraz średnia arytmetyczna $H$ krzywizn głownych spełnia równość $K = H^2$.

6. Znaleźć drugą formę, krzywizny i kierunki główne, krzywiznę Gaussa oraz typy punktów na powierzchniach:
a) pseudosfera $(a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u))$,
b) powierzchnia powstała przez obrót wokół osi $z$-ów krzywej $y = 0$, $x = f(z)$, gdzie $f(z) > 0$.

7. Udowodnić, że jeżeli powierzchnia składa się tylko z punktów sferycznych, to powierzchnia ta leży na pewnej sferze.

8. Podać przykłady (wzory) powierzchni, które składają się tylko z punktów a) eliptycznych, b) parabolicznych, c) siodłowych.

9. Czy istnieje spójna powierzchnia zawierająca punkty eliptyczne i hiperboliczne oraz nie zawierająca punktów innego typu.

# SERIA X

1. Definicja: Linią asymptotyczną powierzchni nazywamy krzywą leżącą na powierzchni, wzdłuż której krzywizna normalna jest równa zeru. Kierunek asymptotyczny, to prosta wyznaczona przez wektor styczny takiej krzywej. Udowodnić, że
a) jeśli punkt na powierzchni jest hiperboliczny, to w tym punkcie są dwa kierunki asymptotyczne,
b) jeśli jest paraboliczny, to w tym punkcie jest jeden kierunek asymptotyczny,
c) jeśli punkt na powierzchni jest eliptyczny, to w tym punkcie nie ma kierunków asymptotycznych.

2. Dana jest funkcja gładka $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Znaleźć kierunki asymptotyczne powierzchni $z = f(x) - f(y)$. Dla jakich funkcji $f$ kierunki asymptotyczne są prostopadłe? Wsk: wykazać, że kierunki asymptotyczne są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy średnia krzywizna $H = \ldots$.

3. Dana jest powierzchnia obrotowa $M$ powstała przez obrót krzywej $r(z) = x$ wokół osi $z$-ów. Udowodnić, że krzywa na $M$ jest geodezyjna wtedy i tylko wtedy, gdy $r \sin\alpha = \text{const.}$, gdzie $\alpha$ jest kątem, pod jakim krzywa przecina tworzące (południki).

4. Znaleźć geodezyjne na płaszczyźnie hiperbolicznej: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ z tensorem metrycznym $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$, $g_{12} = g_{21} = 0$. Wsk: wykazać, że proste $y = a$ są geodezyjnymi oraz, że homografie są izometriami.

5.Wykazać, że powierzchnia $g_{11} = f(u)$, $g_{22} = g(v)$, $g_{12} = g_{21} = 0$ jest płaska.

6. Znaleźć krzywiznę geodezyjną krzywej $(a\cos v, a\sin v, hv)$ na
a) helikoidzie,
b) walcu.

7. Znaleźć krzywiznę geodezyjną krzywej $v = \pi$ na powierzchni $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{11} = g_{22} = u^2 + \cos v + 2$.