GAL z ★, konspekt wykładów: Endomorfizmy

14 marzec 2017

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.

Materiał mniej standardowy jest opisany dokładniej.

1 Przestrzenie ilorazowe, wektory włane

Przestrzenie ilorazowe [Kostrikin I.2.6]

1.1 Niech $W \subset V$ para podprzestrzeni. Definiujemy relację równoważności w V: $\alpha \sim \beta$ jeśli $\alpha - \beta \in W$. Zbiór klas abstrakcji ma strukturę przestrzeni liniowej. Oznaczenie V/W.

1.2 Odwzorowanie $\pi : V \to V/W$ jest liniowe, jest epimorfizmem, $ker(\pi) = W$.

1.3 Własność uniwersalna ilorazu: dla każdego przekształcenia liniowego $\phi : V \to Z$ takiego, że $\phi_{|W} = 0$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie $\overline{\phi}$ takie,że $\phi = \overline{\phi} \circ \pi$:

$$\begin{tikzcd} & & V/W \arrow[dd, dotted, "\exists!\overline{\phi}"] \\ W \arrow[urr, "0"] \arrow[r, "\iota"] \arrow[drr, "0"'] & V \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "\forall\phi"'] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Innymi słowy: wszystkie przekształcenia z V zerujące się na W jednoznacznie faktoryzują się przez V/W. Własność jednoznacznej faktoryzacji definiuje V/W z dokładnością do izomorfizmu.

1.4 Własność uniwersalna determinuje iloraz z dokładnością do izomorfizmu. Jeśli odwzorowanie $p : V \to Q$ spełnia warunek: $p \circ \iota = 0$ *oraz dla każdego przekształcenia liniowego* $\phi : V \to Z$ *takiego, że* $\phi_{|W} = 0$ *istnieje dokładnie jedno przekształcenie* $\overline{\phi}$ *takie,że* $\phi = \overline{\phi} \circ \pi$*:*

$$\begin{tikzcd} & & Q \arrow[dd, dotted, "\exists!\overline{\phi}"] \\ W \arrow[urr, "0"] \arrow[r, "\iota"] \arrow[drr, "0"'] & V \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "\forall\phi"'] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

to $Q \simeq V/W$ oraz ten izomorfizm jest zgodny z przekształceniami $p : V \to Q$ i $\pi : V \to V/W$.

1.5 Gdy $U, W \subset V$, to

$$(U + W)/W \simeq U/(U \cap W).$$

1.6 Wniosek: Jeśli $V = W \oplus U$ to $V/W \simeq U$.

1.7 Wniosek: niech $\phi : V \to Z$ będzie przekształceniem liniowym, wtedy istnieje przekształcenie $\overline{\phi} : V/ker(\phi) \to Z$ takie, że $\phi = \overline{\phi} \circ \pi$. Ponadto $\overline{\phi}$ zadaje izomorfizm $V/ker(\phi) \simeq im(\phi)$.

1.8 Jeśli V jest skończonego wymiaru, to $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$. Kowymiar definiujemy jako

$$\mathrm{codim}_V(W) = \dim(V/W).$$

Kowymiar może być skończony, nawet gdy $\dim V = \infty$

1.9 Ćwiczenie: Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem domkniętym oraz niech $C(A)$ oznacza zbiór funkcji ciągłych na S. Wtedy $C(A) \simeq C(\mathbb{R})/I(A)$, gdzie $I(A) = \{f \in C(\mathbb{R}) \,|\, \forall x \in A\,, f(x) = 0\}$.

Endomorfizmy czyli operatory liniowe [Kos roz 2], [Tor VI]

1.10 End(V), czyli algebra operatorów liniowych. Algebra macierzy $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

1.11 Wektory własne, wartości własne, przestrzeń własne $V_\lambda = \{\alpha \in V \mid \phi(\alpha) = \lambda\phi\}$.

1.12 Przykład $M(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, wartości własne $\lambda = -1$ i $\lambda = 5$, wektory własne dla $\lambda = -1$: $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$, dla $\lambda = 5$: $(1,1,1)$.

1.13 Metoda szukania wartoci wasnych i wektorw wasnych:
1. rozwiązujemy równanie charakterystyczne $\det(M(\phi) - \lambda\, I) = 0$
2. roziązujemy układ liniowy jednorodny $(\phi - \lambda Id)(v) = 0$.

2 Wartoći własne i przestrzenie własne, postać górnotrójkątna

2.1 Przykład: jakie są wektory własne przekształcenia $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $D(f) = f'$?

2.2 Przykład: jakie są wektory własne przekształcenia $D : C^\infty(S^1) \to C^\infty(S^1)$, $D^2(f) = f''$?

2.3 Przykład $\phi(x,y) = (y, x+y)$: wyprowadzenie wzoru na liczby Fibonacciego.

2.4 Ćwiczenie z analizy: Niech $V = C^\infty(\mathbb{R})$,
a) $\phi(f) = \big((t^2-1)f'(t)\big)'$. Sprawdzić, że wielomian Legendra $P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\big((t^2-1)^n\big)$ jest wektorem własnym z wartością własną $n(n+1)$.
b) $\phi(f) = t\,f' - (1-t^2)f''$. Sprawdzić, że wielomian Czebyszewa T_n jest wektorem własnym z wartością własną n^2. (Wielomian Czebyszewa spełnia $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$.)

2.5 Wielomian charakterystyczny $W_\phi(t) = \det(M(\phi - t\,Id))$. (Nie zależy od wyboru bazy.)

2.6 Gdy $\dim(V) = 2$, to

$$W_\phi(t) = t^2 - 2\,tr(M(\phi)t + \det(M(\phi))\,,$$

gdzie dla macierzy $A = \{a_{ij}\}_{1\le i,j\le n}$ ślad $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Ogólniej,

$$W_\phi(t) = (-1)^n t^n + (1)^{n-1} tr(M(\phi))t^{n-1} + \ldots ??? \cdots + \det(M(\phi))\,.$$

2.7 Ćwiczenie: Dla dowolnych macierzy kwadratowych A, B mamy $tr(AB) = tr(BA)$.

2.8 Jeśli wektory α_i dla $i = 1, \dots, k$ są własne dla różnych wartości własnych, to są liniowo niezależne.

2.9 W szczególności, jeśli $W_\phi(t)$ rozkłada się na różne czynniki liniowe, to isnieje baza złożona z wektorów własnych. W tej bazie $M(\phi)$ jest diagonalna.

2.10 Mówimy, że endomorphizm $\phi \in End(V)$ jest diagonalizowalny, jeśli w pewnej bazie V macierz ϕ jest diagonalna.

2.11 Kryterium diagonalizowalności: ϕ jest diagoanalizowalny wtedy i tylko wtedy gdy:
1) $W_\phi(t)$ rozkłada się na czynniki linowe w K
2) krotność λ w W_ϕ jest równa $\dim(V_\lambda)$

2.12 Przykład $\phi(x, y) = (x + y, y)$, tu $\dim V_1 = 1 <$ krotność $\lambda = 1$ w $W_\phi(t) = (t - 1)^2$.

2.13 Przykład $\phi(x, y) = (\cos(t)x + \sin(t)y, -\sin(t)x + \cos(t)y$

2.14 Podprzestrzenie niezmiennicze. Jeśli istnieje podprzestrzeń niezmiennicza wymiaru k, to w pewnej bazie ϕ ma macierz blokową gżnotrójkątną.

2.15 Jeśli istnieje ciąg podprzestrzeni niezmienniczych

$$0 = V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots \subset V^n = V$$

$\dim(V_k) = k$,to w pewnej bazie ϕ ma macierz gżnotrójkątną

2.16 Jeśli ciało jest algebraicznie domknięte, to istnieje conajmniej jedna wartość własna i wektor własny.

2.17 Niech ϕ będzie endomorfizmem zdefiniowanym nad ciałem $\mathbb{K}$. Jeśli wielomian charakterystyczny ma pierwiastki w ciele $\mathbb{K}$, istnieje ciąg podprzestrzeni liniowych niezmienniczych

$$0 = V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \dots \subset V^n = V$$

takich, że $\dim V^i = i$. (Zatem $M(\phi)$ jest górnotrójkątna w pewnej bazie.)

Dowód indukcyjny korzystający z następujący oczywisty lemat: niech $\phi \in End(V)$, $\psi \in End(Z)$, $f : V \to Z$, $f\phi = \psi f$. Jeśli $W \subset Z$ jest ψ-niezmienniczą podprzestrzenią, to $f^{-1}(W) \subset V$ jest ϕ-niezmiennicza. Stosujemy lemat do $\psi = \bar{\phi} \in End(V/\mathrm{lin}\{v\})$, $f = \pi : V \to V/\mathrm{lin}\{v\}$, gdzie v jest dowolnym wektorem własnym.

Uwaga: Zwykle powyższe twierdzenie dowodzi się przy założeniu, że ciało jest algebraicznie domknięte. Aby wykazać twierdzenie jedynie przy założeniu, że W_ϕ rozkłada się, rozumowanie jest takie: Najpierw zakładamy, że ciało $\mathbb{K}$ jest zanurzone w ciele algebraicznie domkniętym $\mathbb{L}$. Konstrukcje przeprowadzamy dla przestrzeni wektorowych nad $\mathbb{L}$. Wtedy nie ma przeszkód by sprowadzić ϕ do postaci górnotrójkątnej (zupelnie nas nie obchodzi jaki jest wielomian charakterystyczny $\bar{\phi} \in End(V/\mathrm{lin}\{v\})$). Jak już mamy postać górnotrąjkątną, to widzimy, że wielomian charakterystyczny jest iloczynem $\lambda_i - t$, gdzie λ_i są wzięte z przekątnej. Więc $W_\phi = (\lambda_1 - t)W_{\bar{\phi}}$. Wnioskujemy, że $W_{\bar{\phi}}$ rozkłada się w wyjsciowym ciele $\mathbb{K}$.

Łatwo też udowodnić formułę $W_\phi = (\lambda_1 - t)W_{\bar{\phi}}$. Bez uciekania się do algebraicznego domknięcia, tylko trzeba zobaczyć jaki jest związek macierzy $M(\phi)$ z $M(\bar{\phi})$ w odpowiedniej bazie.

2.18 Twierdzenie Cayleya-Hamiltona: $W_\phi(\phi) = 0$. W dowodzie korzystamy z tego, że każde ciało jest zawarte w ciele algebraicznie domkniętym.

3 Przestzrenie pierwiastkowe

3.1 Wymiar przestrzeni własnej V_λ jest miejszy bądź równy krotności λ w W_ϕ.

3.2 Przestrzeń pierwiastkowa: $V_{(\lambda)} = \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N} : (\phi - \lambda\, Id)^n(v) = 0\}$. (Inna nazwa: uogólniona przestrzeń własna.)

3.3 Oznaczenie: zbór wartości własnych endomorfizmu ϕ nazywamy spektrum i oznaczamy $spec(\phi)$.

3.4 Twierdzeinie o rozkładzie na przestrzenie pierwiastkowe. Jeśli $\dim(V) < \infty$ i $W_\phi(t)$ rozkłada się na czynniki liniowe w $\mathbb{K}$ (np. $\mathbb{K}$ jest algebraicznie domknięte), to

$$V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(\phi)} V_{(\lambda)}.$$

3.5 Lemat o wielomianach: dane wielomiany $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{K}[x]$. Istnieją wielomiany $h_1, \ldots, h_m \in \mathbb{K}[x]$ takie, że $\sum g_i h_i = NWD(g_1, \ldots, g_m)$. (Dowód indukcyjny ze względu na m. Dla $m = 2$ algoryrm Euklidesa.)

3.6 Dowód 3.4 z lematu o wielomianach, jak w [Kos roz II §4.3].

3.7 Załóżmy, że $\phi : V \to V$ spełnia pewną tożsamość wielomianową $f(\phi) = 0$ (gdy $\dim(V) < \infty$ to np. $f = W_\phi$). Wielomian minimalny μ_ϕ jest wielomianem o najmniejszym stopniu spełniającym $\mu_\phi(\phi) = 0$. Każdy inny wielomian mający tę własność jest podzielny przez μ_ϕ. Naogół $\mu_\phi \neq W_\phi$, choć w μ_ϕ musi wystąpić każdy czynnik liniowy z W_ϕ.

3.8 Rozkład $V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(\phi)} V_{(\lambda)}$ można udowodnić także gdy $\dim V = \infty$ oraz ϕ spełnia tożsamość wielomianową i wielomian minimalny μ_ϕ rozkłada się na czynniki liniowe.

3.9 Def: $\psi \in End(V)$ jest nilpotentny jeśli $\psi^n = 0$ dla pewnego n. Jeśli przestrzeń jest skończonego wymiaru, to ten warunek jest równoważny: $V = V_{(0)}$.

3.10 Def: V jest cykliczna (ze względu na ψ), jeśli istnieje wektor $\alpha \in V$, taki, że V jest rozpięta przez $\{\psi^i(\alpha) \mid i \geq 0\}$. Mówimy, że α generuje V.

3.11 Załóżmy, że ψ nilpotentny, V cykliczna, generowana przez α. Niech m najwięsze, takie, że $\psi^m(\alpha) \neq 0$. Wtedy wektory

$$\psi^m(\alpha), \psi^{m-1}(\alpha), \ldots, \psi(\alpha), \alpha$$

są liniowo niezależne (więc są bazą V). Macierz ψ tej w bazie jest postaci Jordana z jedną klatką o wartości własnej $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podsumowanie: Pokazaliśmy, że V rozkłada się na przestrzenie pierwiastkowe. Na $V(\lambda)$ przekształcenie $\psi = \phi - \lambda Id$ jest nilpotentne. W następnym kroku udowodnimy,że $V(\lambda)$ rozkłada się na sumę prostą przestrzeni cyklicznych. Stąd wynika:

Twierdzenie o postaci kanonicznej Jordana Dla każdego endomorfizmu przestrzeni skończonego wymiaru nad ciałem algebraicznie domkniętym istnieje baza, w której macierz przekształcenia jest klatkowo-diagonalna

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{J_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \boxed{J_{k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \boxed{J_k} \end{pmatrix}$$

z klatkami postaci

$$J_\ell = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \dots 0 & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \dots \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

[Kos roz II §4.2]

4 Tw Jordana efektywnie

4.1 Lemat: Załóżmy, że ψ nilpotentny na V oraz $W \neq V$ podprzestrzeń cykliczna maksymalnego wymiaru. Wtedy istnieje wektor własny $\beta \in V \setminus W$.

4.2 Lemat: Załóżmy, że ψ nilpotentny na V oraz W podprzestrzeń cykliczna maksymalnego wymiaru. Wtedy istnieje niezmiennicze dopełnienie do sumy prostej $V = W \oplus U$.
Dow. Indukcja po $\dim(V)$: dzielimy przez $lin(\beta)$.

4.3 Ćwiczenie

$$\mu_\phi = \prod_{\lambda \in Spec(\phi)} (x-\lambda)^{r(\lambda)},$$

gdzie $r(\lambda)$ jest rozmiarem maksymalnej klatki Jordana z wartością własną λ.

4.4 Przykład: $M(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Jedna klatka dla wartości własnej 4 rozmiaru 1 i jedna dla wartości własnej 1 rozmiaru 3.

Efektywne znajdowanie bazy Jordana i jednoznaczności rozkładu

4.5 Szukanie bazy Jordana: dla $\lambda \in Spec(\phi)$. Rozważamy ciąg podprzestrzeni

$$V = im(\psi^0) \supset im(\psi^1) \supset im(\psi^2) \supset \dots \supset im(\psi^{r(\lambda)-1}) \supset im(\psi^p) = im(\psi^{p+1}) = im(\psi^{p+2}) = \dots$$

Wnioskujemy, że $p = r(\lambda)$ jest rozmiarem największej klatki,

$$im(\psi^p) = \bigoplus_{\mu \neq \lambda} V_{(\mu)}, \qquad ker(\psi^p) = V_{(\lambda)}, \qquad V = im(\psi^p) \oplus ker(\psi^p).$$

Konstruujemy „łańcuszki”

$$\alpha_1^{(i)} \mapsto \alpha_2^{(i)} \mapsto \dots \mapsto \alpha_{p-1}^{(i)} \mapsto \alpha_p^{(i)} \mapsto 0$$

biorąc za $\alpha_p^{(i)}$ bazę $ker(\psi)\cap im(\psi^{p-1})$. Dobieramy wektory $\alpha_{p-j}^{(i)}\in ker(\psi^j)\cap im(\psi^{p-j})$ biorąc przeciwobrazy $\alpha_{p-j+1}^{(i)}$. Jeśli na którymś etapie układ wektorów $\{\alpha_{p-j}^{(i)}\}$ nie rozpina $im(\psi^{p-j})\cap ker(\psi^j)$ to uzupełniamy go do bazy tej przestrzeni.

4.6 Inna metoda znajdowana bazy Jordana: badamy ciąg

$$0=ker(\psi^0)\subset ker(\psi^1)\subset ker(\psi^0)\subset\cdots\subset ker(\psi^p)=ker(\psi^{p+1}).$$

Jeśli wiemy, że w postaci Jordana jest $d=d(p,\lambda)$ klatek rozmiaru p, to wybieramy d wektorów liniowo niezależnych w $\alpha_1^{(i)}\in\ker(\psi^p)$ jeśli ten wybór jest dostatecznie przypadowy, to układ wektorów $\alpha_j^{(i)}=\psi^{j-1}(\alpha_1^{(i)})$ $(i=1,\ldots d,\ j=1,\ldots p)$ będzie liniowo niezależny. Układ ten należy dopełniać indukcyjnie do układu liniowo niezależnego wybierając wektory z $ker(\psi^k)$ dla $k=p-1,p-2,\ldots,1$.

5 Jednoznaczność postaci Jordana

5.1 Ilość i typ klatek Jordana nie zależy od wyboru bazy Jordana. Ilość klatek k-wymiarowych z wartością własną λ jest równa $d(k,\lambda)$. Niech $\psi=\phi-\lambda Id$. Mamy

$$\sum_{\ell\ge k}d(\ell,\lambda)=\dim(\ker(\psi^k)-\dim(\ker(\psi^{k-1}).$$

Stąd

$$d(k,\lambda)=2\dim(\ker(\psi^k)-\dim(\ker(\psi^{k-1})-\dim(\ker(\psi^{k+1})=r(\psi^{k+1})+r(\psi^{k-1})-2r(\psi^k).$$

5.2 Mówimy, że $\phi\in End(V)$ jest diagonalizowalny, jeśli w pewnej bazie $M(\phi)$ jest diagonalna.

5.3 Endomorfizm ϕ jest półprosty, jeśli dla każdej niezmienniczej przestrzeni $U\subset V$ istnieje niezmiennicze dopełnienie $W\subset V$ do sumy prostej.

5.4 Nad ciałem algebraicnie domkniętym ϕ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ jest półprosty. (Ćw.)

5.5 Dla endomorfizmu diagonalizowalnego jeśli $(\phi-\lambda\, Id)^m(\alpha)=0$ to $(\phi-\lambda\, Id)(\alpha)=0$.

5.6 Endomorfizm diagonalizowalny ϕ ma własność: $ker(\phi)=ker(\phi^n)$ dla każdego $n\ge 1$.

5.7 Ćwiczenie: sprawdzić powyższą własność dla półprostego $\phi\in End(V)$.

5.8 (Addytywny rozkład Jordana-Chevalleya.) Jeśli ϕ zapisać jako $\phi=\phi_d+\phi_n$, gdzie ϕ_d jest półprosty, a ϕ_n jest nilpotentny oraz $\phi_n\phi_d=\phi_d\phi_n$ to składniki są wyznaczone jednoznacznie.

5.9 Lemat: $ker(\phi_d-\lambda\, Id)=V_{(\lambda)}$. (Zatem ϕ_d na $V_{(\lambda)}$ musi być mnożeniem przez skalar λ.)
Dow. Niech N będzie takie, że $\phi_n^N=0$ oraz $V_{(\lambda)}=ker((\phi-\lambda\, Id)^N)$.
Z przemienności $(\phi_d-\lambda\, Id)$ i ϕ_n mamy
$(\phi-\lambda\, Id)^N=\sum_{k=0}^N\binom{N}{k}\phi_n^k(\phi_d-\lambda\, Id)^{N-k}$.
Stąd dla $v\in ker(\phi_d-\lambda\, Id)$ mamy
$(\phi-\lambda\, Id)^N(v)=\phi_n^N(v)+\sum_{k=1}^N\binom{N}{k}\phi_n^k(\phi_d-\lambda\, Id)^{N-k}(v)=0+0=0$

Czyli $V_{(\lambda)} = ker((\phi - \lambda\, Id)^N) \subset ker(\phi_d - \lambda\, Id)$.
Z drugiej strony $\phi_d - \lambda\, Id = (\phi - \lambda\, Id) - \phi_n$, więc
$(\phi_d - \lambda\, Id)^{2N}(v) = \sum_{k=0}^{2N} (-1)^k \binom{2N}{k} \phi_n^k (\phi - \lambda\, Id)^{2N-k}(v) =$
$= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{2N}{k} \phi_n^k (\phi - \lambda\, Id)^{2N-k}(v) + \sum_{k=N}^{2N} (-1)^k \binom{2N}{k} \phi_n^k (\phi - \lambda\, Id)^{2N-k}(v)$
Ale $\phi_n^k = 0$ dla $k \geq N$, więc powyższa suma jest równa
$= \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{2N}{k} \phi_n^k (\phi - \lambda\, Id)^{2N-k}(v)$.
Dla $v \in ker((\phi - \lambda\, Id)^N)$, $k < N$ mamy $(\phi_d - \lambda\, Id)^{2N-k}(v) = 0$. Stąd dla $v \in ker((\phi - \lambda\, Id)^N) = V_{(\lambda)}$
$(\phi_d - \lambda\, Id)^{2N}(v) = 0$
Zatem
$ker((\phi_d - \lambda\, Id)^{2N}) \subset ker((\phi - \lambda\, Id)^N) = V_{(\lambda)}$.
Ale skoro ϕ_d jest diagonalizowalny, to
$ker((\phi_d - \lambda\, Id) = ker(\phi_d - \lambda\, Id)^{2N}) \subset V_{(\lambda)}$.

5.10 Z powyższego lematu wynika jednoznaczność, bo dostaliśmy, że $(\phi_d)_{|V_{(\lambda)}} = \lambda\, Id$. Korzystamy z rozkładu $V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(\phi)} V_{(\lambda)}$.

5.11 Jak znaleźć ϕ_d nie szukając bazy Jordana?
Twierdzenie: istnieje wielomian $p \in \mathbb{K}[t]$ taki,że $\phi_d = p(\phi)$.

5.12 *Twierdzenie Chińskie o resztach.* Niech $\mathcal{R} = \mathbb{K}[t]$ lub $\mathbb{Z}$. Niech $f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathcal{R}$ będą elementami parami względnie pierwszymi, oraz niech $r_1, r_2, \ldots r_m \in \mathcal{R}$ dowolnymi elementami. Wtedy istnieje $p \in \mathcal{R}$ taki że dla $k = 1, 2, \ldots, m$ mamy $p \equiv r_k \bmod f_k$.

Dowód dla $\mathcal{R} = \mathbb{K}[t]$. Oznaczmy przez $\mathbb{K}[t]/(f)$ zbiór reszt z dzielenia przez f. Oczywiście $\mathbb{K}[t]/(f) \simeq \mathbb{K}[t]_{<\deg f} \simeq \mathbb{K}^{\deg f}$. Niech $f = f_1 f_2 \ldots f_m$ oraz

$$\theta : \mathbb{K}[t]/(f) \to \mathbb{K}[t]/(f_1) \times \mathbb{K}[t]/(f_2) \times \cdots \times \mathbb{K}[t]/(f_m)$$

będzie zadane wzorem

$$p \mapsto (p \bmod f_1\ ,\ p \bmod f_2\ ,\ \ldots\ ,\ p \bmod f_m)$$

Sprawdzamy, że θ jest monomorfizmem. Ponieważ dziedzina i przeciwdziedzina mają równe wymiary, więc θ jest epimorfizmem.

5.13 Konstrukcja p spełniającego $p(\phi) = \phi_d$: Niech $\mu_\phi = \prod_{k=1}^m (\lambda_k - t)^{n_k}$ będzie wielomianem minimalnym (można też wziąć wielomian charakterystyczny). Niech $f_k = (\lambda_k - t)^{n_k}$, $r_k = \lambda_k$. Znajdujemy p z tw.chińskiego o resztach. Dla każdego k

$$p = g_k(t)(\lambda_k - t)^{n_k} + \lambda_k$$

W obcięciu do $V_{(\lambda_k)}$ przekształcenie $p(\phi)$ jest mnożeniem przez λ_k. Zatem $p(phi) = \phi_d$.

5.14 Przykład: jeśli $\mu_\phi = (a - t)^2 (b - t)^2$ to $p(t) = \frac{1}{(a-b)^2}(-2t^3 + 3(a + b)t^2 - 6abt + ab(a + b))$.

5.15 Wniosek: jeśli W jest ϕ-niezmennicza, to jest ϕ_d-niezmiennicza i ϕ_n-niezmiennicza.

5.16 Zbiór endomorfizmów odwracalnych $GL(V) \subset End(V)$ jest grupą. Oznaczamy $GL_n(\mathbb{K}) := GL(\mathbb{K}^n) =$ zbiór macierzy $n \times n$ odwracalnych.

5.17 Każdy niepusty zbiór $G \subset GL(V)$ zamknięty ze względu na składanie i branie odwrotności jest podgrupą.

5.18 Przykłady podgrup:
– $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}$
– $O_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid AA^T = 1\}$
– $SO_n(\mathbb{K}) = O_n(\mathbb{K}) \cap SL_n(\mathbb{K})$
– macierze górnotrójkątne odwracalne

5.19 (Multiplikatywny rozkład Jordana-Chevalleya.) Mówimy, że ψ jest unipotentny jeśli $\psi - Id$ jest nilpotentny (czyli ψ jest postaci $Id + nilpotentny$). Załóżmy, że ϕ jest odwracalny. Można ϕ przedstawić jako złożenie $\phi = \phi_d \phi_u$, gdzie ϕ_d jest diagonalizowalny, a ϕ_u jest unipotentny oraz $\phi_u \phi_d = \phi_d \phi_u$. Czynniki są wyznaczone jednoznacznie.

Dow: $\phi = \phi_d + \phi_n = \phi_d(Id + \phi_d^{-1}\phi_n)$.

5.20 Ćwiczenie: sparwadzić, że dla wyżej wymienionych podgrup jeśli $\phi \in G$, to $\phi_d \in G$.