GAL, Kolokwium 2 TEMAT **A** 21.01.2011

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. Niech V_t i W będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ takimi, że
$$V_t = lin((1,2,2,1),(1,1,-1,t)), \qquad W\colon \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$
   (a) Znaleźć $\dim(V_t + W)$ i $\dim(V_t \cap W)$ w zależności od wartości parametru $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie symetrią względem V_1 wzdłuż W. Obliczyć $\varphi((1,1,2,0))$.

2. Dane są bazy $\mathcal{A}$: $(1,0,1),(0,1,1),(1,2,-1)$, $\mathcal{B}$: $(1,1,1),(0,2,1),(0,-1,0)$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$.
   (a) Funkcjonał liniowy $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ ma współrzędne $-1,2,1$ w bazie dualnej do $\mathcal{B}$.
   Znaleźć wzór na f. Znaleźć współrzędne f w bazie dualnej do $\mathcal{A}$.
   (b) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takim, że
$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ funkcjonał $g(x_1,x_2,x_3) = rx_1 + x_2 - x_3 \in (\mathbb{R}^3)^*$ należy do jądra przekształcenia sprzeżonego φ^*?

3. Dane są macierze $A_t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$.
   (a) Obliczyć $\det B$. Obliczyć $\det(A_t^5 B^{-7})$ w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym zadanym warunkiem $M(\varphi)_{\mathcal{S}t}^{\mathcal{S}t} = C_t$. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie φ jest izomorfizmem? Dla każdego takiego t znaleźć macierz w bazie standardowej przekształcenia φ^{-1}.

4. Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.
   (a) Wykazać, że $\ker(\varphi)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V oraz wykazać, że $\mathrm{im}(\varphi)$ jest podprzestrzenią przestrzeni W.
   (b) Wykazać, że $\dim V = \dim\ker(\varphi) + \dim\mathrm{im}(\varphi)$.

5. (a) Niech $A_1, A_2 \in M_{m\times n}(K)$. Wykazać, że:
   (A_2 może być otrzymana z A_1 ciągiem operacji elementarnych na wierszach) $\Longleftrightarrow$ (istnieje macierz odwracalna $C \in M_{m\times m}(K)$ taka, że $A_1 = CA_2$).
   (b) Niech $B, B_1, B_2 \in M_{m\times n}(K)$. Załóżmy że dla $i = 1,2$ macierz B_i jest schodkowa zredukowana i może być otrzymana z B ciągiem operacji elementarnych na wierszach. Wykazać, że $B_1 = B_2$.

GAL, Kolokwium 2 TEMAT **B** 21.01.2011

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. Niech V_t i W będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ takimi, że

$$V_t = lin((2,1,1,1),(-1,1,1,t)), \qquad W\colon \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & - & x_3 & = & 0 \\ x_2 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

   (a) Znaleźć $\dim(V_t + W)$ i $\dim(V_t \cap W)$ w zależności od wartości parametru $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie symetrią względem V_{-1} wzdłuż W. Obliczyć $\varphi((2,1,0,1))$.

2. Dane są bazy $\mathcal{A}\colon (1,0,1),(0,1,-1),(-1,2,-1)$, $\mathcal{B}\colon (1,1,1),(0,-1,1),(0,-1,0)$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$.

   (a) Funkcjonał liniowy $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ ma współrzędne $2,1,1$ w bazie dualnej do $\mathcal{B}$. Znaleźć wzór na f, oraz znaleźć współrzędne f w bazie dualnej do $\mathcal{A}$.

   (b) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ funkcjonał $g(x_1,x_2,x_3) = rx_1 - x_2 + x_3 \in (\mathbb{R}^3)^*$ należy do jądra przekształcenia sprzeżonego φ^*?

3. Dane są macierze $A_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$.

   (a) Obliczyć $\det B$. Obliczyć $\det(A_t^5 B^{-7})$ w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym zadanym warunkiem $M(\varphi)_{\mathcal{S}t}^{\mathcal{S}t} = C_t$. Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie φ jest izomorfizmem? Dla każdego takiego t znaleźć macierz w bazie standardowej przekształcenia φ^{-1}.

4. Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.

   (a) Wykazać, że $\ker(\varphi)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V oraz wykazać, że $\operatorname{im}(\varphi)$ jest podprzestrzenią przestrzeni W.

   (b) Wykazać, że $\dim V = \dim \ker(\varphi) + \dim \operatorname{im}(\varphi)$.

5. (a) Niech $A_1, A_2 \in M_{m\times n}(K)$. Wykazać, że:

   (A_2 może być otrzymana z A_1 ciągiem operacji elementarnych na wierszach) $\Longleftrightarrow$ (istnieje macierz odwracalna $C \in M_{m\times m}(K)$ taka, że $A_1 = CA_2$).

   (b) Niech $B, B_1, B_2 \in M_{m\times n}(K)$. Załóżmy że dla $i = 1,2$ macierz B_i jest schodkowa zredukowana i może być otrzymana z B ciągiem operacji elementarnych na wierszach. Wykazać, że $B_1 = B_2$.