

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNICIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. Niech $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) > 0, |z| < 2\}$ i niech funkcja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie zadana wzorem $f(z) = (1+i) \cdot z^2 + 1$.

(a) Naszkicować zbiory \mathcal{D} oraz $f(\mathcal{D})$.

(b) Dla $k \in \mathbb{N}$ niech $z_k = \frac{(1+i\sqrt{3})^k}{300}$. Dla jakich $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $z_k \in \mathcal{D}$?

2. W \mathbb{R}^4 rozpatrzmy podprzestrzeń $V = \operatorname{lin}((1, 2, 1, 2), (3, 5, 1, 7), (5, 9, 3, 11))$.

(a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V . Czy wektor $\alpha = (1, 1, 0, 1)$ należy do V ?

(b) Znaleźć układ równań liniowych opisujący V . Czy V można opisać jednym równaniem liniowym? Czy V można opisać układem trzech równań liniowych? Odpowiedź uzasadnij.

3. W \mathbb{R}^4 rozpatrzmy podprzestrzeń W będącą przestrzenią rozwiązań układu równań

$$U: \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

(a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni W . Znalezionej bazę przestrzeni W dopełnić do bazy przestrzeni \mathbb{R}^4 w taki sposób aby w tej bazie wektor $\beta = (1, 2, 4, 3)$ miał współrzędne $1, 1, 0, 1$. Czy istnieje baza przestrzeni W , którą można dopełnić do bazy przestrzeni \mathbb{R}^4 w ten sposób, że wektor β ma w tej bazie współrzędne $1, 1, 0, 0$? Odpowiedź uzasadnij.

(b) Niech $W_s = \operatorname{lin}((1, 5, 1, 3), (2, 3s+10, s+2, 2s+6))$. Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $W_s = W$?

4. Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni liniowej V . Stosując definicje: podprzestrzeni, kombinacji liniowej układu wektorów i liniowej niezależności układu wektorów, wykazać, że

(a) Zbiór $\operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V .

(b) Jeśli układ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny oraz $\beta \in V$, to układ $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy $\beta \notin \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

5. (a) W \mathbb{R}^3 podać przykład takiego układu wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, którego każdy jego podukład złożony z trzech wektorów jest liniowo niezależny.

(b) Czy istnieje taki układ wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}$ w przestrzeni \mathbb{R}^n , którego każdy podukład złożony z n wektorów jest liniowo niezależny? Czy istnieje taki nieskończony układ wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ w przestrzeni \mathbb{R}^n , którego każdy podukład złożony z n wektorów jest liniowo niezależny? Uzasadnić.