ZADANIA DO ODDANIA NA PIŚMIE 9 I 2013

1 Niech $f(x,y,z) = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4$ będzie funkcjonałem na $\mathbb{R}^4$. Znaleźć współrzędne funkcjonału f w następujących bazach:
a) w bazie sprzężonej do standardowej,
b) w bazie sprzeżonej do $(0,1,0,0)$, $(3,0,0,0)$, $(0,0,2,0)$, $(0,0,0,3)$,
c) w bazie sprzeżonej do $(3,0,0,1)$, $(0,2,3,0)$, $(0,1,2,0)$, $(1,1,1,1)$.

2 Dana baza $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,0,3)$, $\alpha_1 = (1,0,2)$. Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem liniowym $f = 3\alpha_1^* - 2\alpha_2^* + 4\alpha_3^*$.
a) Napisać wzór na f.
b) Znaleźć współrzędne tego funkcjonału w bazie sprzężonej do bazy standardowej.

3 Niech $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ będzie dane wzorem

$$\Phi(x,y) = (x_1 - x_2, x_1 - x_3, x_1 - x_4, x_2 - x_3, x_2 - x_4, x_3 - x_4).$$

Znaleźć obraz i jądro przekształcenia sprzężonego $\Phi^*; (\mathbb{R}^6)^* \to (\mathbb{R}^4)^*$. Podać bazę jądra i opisać obraz równaniami.

4 Niech $\dim V = n$ oraz niech $f_1, f_2, \dots f_k \in V^*$. Wykazać że $f_1, f_2, \dots f_k$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy $\dim(\bigcap_{i=1}^k ker(f_i)) = n - k$.

5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Rozwiązać równanie $A + XB = (C + X)D$.

6 Niech A będzie pewną macierzą kwadratową. Wykazać, że jeśli dla pewnego m mamy równość rzędów $rz(A^m) = rz(A^{m+1})$, to dla każdego $n > m$ mamy $rz(A^m) = rz(A^n)$.

7 Obliczyć A^{10}, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wskazówka: udowodnić, że jeśli $CB = BC$, to $(B + C)^n = \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} B^k C^{n-k}$.

8 Obliczyć B^{2013}, gdzie B jest macierzą o wyrazach zespolonych

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9 Niech A będzie macierzą o n wierszach i m kolumnach, $n \geq m$. Załóżmy, że A ma rząd maksymalny.
a) Wykazać, że istnieją takie macierze odwracalne C wymiaru $n \times n$ i B wymiaru $m \times m$ takie, że

$$A = C \cdot \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix},$$

gdzie macierz $\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$ oznacza macierz blokową z blokiem 0 o $n - m$ wierszach.
b) Wykazać, że $A \cdot A^T$ ma rząd m.

10 Podać przykład macierzy A o n wierszach i m kolumnach, $n \geq m$ takiej, że

$$rz(A^T \cdot A) < rz(A) = m.$$

Uwaga: szukać przykładu pośród macierzy o współczynnikach zespolonych.