ZADANIA DO ODDANIA NA PIŚMIE 12 XII

1 Dane przekształcenie $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$f(x,y,z) = (x+y+z, 2x+y+3z, x+2z, 4x+3y+5z)\,.$$

Znaleźć bazy jądra i obrazu.

2 Podać przykład przekształcenia liniowego $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takiego, że jądro jest równe $lin\{(1,2,3),(0,1,1)\}$, obraz jest zawarty w przestrzeni opisanej równaniem $x+y+z=0$, oraz $f(1,1,1) = (1,-2,1)$. Czy można dobrać take f, aby obraz był dokładnie równy przestrzeni opisanej równaniem $x+y+z=0$?

3 Dane $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $f(1,2,1) = (2,3)$, $f(1,0,2) = (1,1)$, $f(2,2,2) = (4,8)$. Znaleźć macierz tego przekształcenia w bazach standardowych i w bazach
$\mathcal{A} : (1,1,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,0)$ (baza $\mathbb{R}^3$),
$\mathcal{B} : (2,1)$, $(5,2)$ (baza $\mathbb{R}^2$).

4 Dane dwie podprzestrzenie $W_1, W_2 \subset V$. Załóżmy, że $\dim W_1 = \dim W_2$. Czy zawsze istnieje taki izomorfizm f przestrzeni V, że $f(W_1) = W_2$? (Rozpatrzeć osobno przypadki $\dim(V) < \infty$ i $\dim(V) = \infty$.)

5 Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że jeśli $\phi \circ \phi = \phi$, to $V = ker\,\phi \oplus im\,\phi$. Ponadto ϕ jest rzutowaniem na $im\,\phi$. Znaleźć wzór rzutowania na $ker\,\phi$ za pomocą ϕ.

6 Wskazać przekształcenia $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $\phi \circ \psi \neq 0$, ale $\psi \circ \phi = 0$.