ZADANIA DO ODDANIA NA 17.X.2012

Zadanie 1. Wyprowadzić bezpośrednio z aksjomatów ciała twierdzenia:
i) $-a = -b \implies a = b$.
ii) $a^{-1} = -b^{-1} \implies a = -b$.
iii) $((a + b) + c) + d = (a + c) + (d + b)$.

Zadanie 2. Zbadaj które z własności: łącznośc, przemiennośc, istnienie elementu neutralnego i istnienie elementu odwrotnego mają poniższe działania na zbiorze liczb wymiernych Q.
a) Odejmowanie,
b) Średnia arytmetyczna,
c) $\star$ określone wzorem: $a \star b = ab + a + b$.

Zadanie 3. Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań nad $\mathbf{R}$ w zależności od parametru a. (Chodzi jedynie o liczbę rozwiązań, a nie o samo rozwiązanie.)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + ax_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 + 4x_4 = a \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2a \end{cases}$$

Zadanie 4. Rozwiąż układ równań nad $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} 3s + 2t + 5u + w = 15 \\ 3s + t + 4u + 2w = 12 \\ 2s + 3t + 5u + w = 13 \\ 4s + 2t + 6u = 20 \end{cases}$$

Zadanie 5. Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że w ciele $\mathbf{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$ (reszt z dzielenia przez p) prawdziwy jest wzór

$$(a + b)^p = a^p + b^p\,.$$

Uwaga: To, że $\mathbf{Z}_p$ jest ciałem (istnienie elementu odwrotnego) wynika z ogólnie znanego faktu, że gdy p jest liczbą pierwszą, to dla każdej liczby a niepodzielnej przez p istnieje liczba b, taka, że $a\,b \equiv 1 \bmod p$.