Zestaw 6 - Przestrzeń sprzężona
Zadania z ♠będziemy robić napewno.

1 ♠Niech $f(x,y,z) = 2x + y - 3z$ będzie funkcjonałem na $\mathbb{R}^3$. Zanaleźć współrzędne f
a) w bazie sprzężonej do standardowej,
b) w bazie sprzeżonej do $(3,0,0)$, $(0,5,0)$, $(0,0,7)$,
c) w bazie sprzeżonej do $(2,0,0)$, $(1,2,0)$, $(0,1,2)$.

2 Niech $f, g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ będą funkcjonałami zadanymi wzorami $f(x,y) = x+iy$, $g(x,y) = x-iy$. Wykazać, że $\{f,g\}$ stanowią bazę $(\mathbb{C}^2)^*$. Znaleźć taką bazę $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^2$, że $\{f,g\}$ jest bazą sprzężoną do $\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

3 ♠Znaleźć taką bazę $\{\alpha_i\}_{i=1,2,3} \subset \mathbb{R}^3$ by standardowy wektor sprężony ϵ_1^* był równy $\alpha_2^* - 5\alpha_3^*$.

4 Podać przykład bazy $\mathbb{R}^3$ taki, że $\epsilon_1^* = 2\alpha_1^* + \alpha_3^*$ oraz $\epsilon_2^* = \alpha_1^* + \alpha_2^*$.

5 Niech $V \subset \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią rozpiętą przez wektory $(1,2,0,-3)$, $(-2,3,2,-3)$ i $(-3,1,2,0)$. Przez $Anh(V) = \left\{f \in (\mathbb{R}^4)^* : \forall v \in V\ f(v) = 0\right\}$ oznaczamy przestrzeń funkcjonałow znikających na V (tzw. *anihilator*). Opisać $Anh(V)$ równaniami. Podać jego bazę.

6 Niech $V \subset \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią opisaną przez równanie $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Opisać $Anh(V)$ równaniami. Podać jego bazę.

7 ♠Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem liniowym $f = 5\epsilon_1^* - 3\epsilon_2^* + \epsilon_3^*$ w bazie sprzężonej do bazy standardowej.
a) Napisać wzór na f.
b) Znaleźć współrzędne tego funkcjonału w bazie sprzężonej do $\alpha_1 = (2,1,1)$, $\alpha_2 = (1,2,3)$, $\alpha_1 = (0,1,1)$.

8 Niech $n \in \mathbb{N}$. Badamy funkcjonały liniowe z przestrzeni macierzy $\phi : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Opisać wszystkie funkcjonały spełniające tożsamość $\phi(AB) = \phi(BA)$ dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

9 ♠Niech $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie dane wzorem $\Phi(x,y) = (x+2y, 3x+6y, 2x+4y)$. Znaleźć obraz i jądro przekształcenia sprężonego $\Phi^*; (\mathbb{C}^4)^* \to (\mathbb{C}^3)^*$ (przypomnienie: $\Phi^*(f) = f \circ \Phi$ dla $f \in (\mathbb{C}^4)^*$).

10 To samo dla$\Phi; \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$

$$\Phi(x,y,z) = (x+2y, x+3y+2z, y+2z, x+y-2z)\,.$$

11 ♠Wykazać, że funkcjonały mają takie same jądra wtedy i tylko wtedy gdy są proporcjonalne.

12 ♠Niech $\dim V = n$ oraz niech $f_1, f_2, \dots f_n \in V^*$. Wykazać że $f_1, f_2, \dots f_n$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy $\bigcap_{i=1}^n ker(f_i) = \{0\}$.

13 Niech $L \subset V$, $\Phi : V \to W$. Wykazać, że

$$L \subset ker\,\Phi \iff im\,\Phi^* \subset Anh(L)\,.$$

Macierze

Oznaczenie: $M(m \times n; \mathbb{R})$ oznacza zbiór macierzy wymiaru $m \times n$ o wyrazach z $\mathbb{R}$.

14 ♠Znaleźć macierz $Y \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$ taką, że

$$2Y \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + Y \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

15 ♠Dla $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ obliczyć $\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

16 ♠Znaleźć $X \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ spełniające równanie

$$a)\ X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b)\ X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

17 Udowodnić że dla $A \in M(n \times n; \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ zachodzi wzór

$$(A + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k.$$

Czy analogiczny wzór zachodzi dla $(A + B)^n$?

18 a) Znaleźć wszystkie macierze $X \in M(3 \times 3; \mathbb{R})$ spełniające równanie

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X.$$

b) Znaleźć macierze przemienne ze wszystkimi macierzami wymiaru 3×3.

19 Niech $\mathbf{T}$ będzie zbiorem macierzy diagonalnych 2×2 postaci $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ dla pewnych elementów $a, b \in \mathbb{R}$. Znaleźć wszystkie macierze odwracalne $X \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$ spełniające warunek:
$X \cdot A \cdot X^{-1} \in \mathbf{T}$ dla wszystkich $A \in \mathbf{T}$.