Zestaw 5

1 Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $f(1,3) = (2,4,1)$ i $f(2,1) = (5,3,2)$. Znaleźć $f(1,1)$.

2 Niech $F : W \to V$ będzie reprezentowane przez macierz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ względem pewnych baz (e_1, e_2, e_3) w przestrzeni V i (f_1, f_2) w W. Wyznaczyć macierz odwzorowania F względem baz $(e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3)$ i (f_1, f_1+f_2).

3 Niech f będzie niezerową funkcją liniową $V \to \mathbb{K}$. Niech $U = ker\, f$. Wykazać, że $V = U \oplus lin\{v\}$ dla dowolnego $v \in V \setminus U$.

4 Znaleźć przykłady przekształceń $f : V \to V$ pewnej przestrzeni (koniecznie nieskończenie wymiarowej) takie, że
a) jest monomorfizmem, ale nie jest epimorfizmem,
b) jest epimorfizmem, ale nie jest monomorfizmem.

5 Określić taki izomorfizm $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$, że $f(e_1 + 2e_2) = e_2 + e_3$.

6 Niech $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$. Czy f jest izomorfizmem? Jeśli tak, to znaleźć przekształcenie odwrotne.

7 Oznaczmy przez $M(n \times n)$ przestrzen liniową macierzy kwadratowych rozmiaru n. (Jaki jest jej wymiar?). Niech

$$T : M(n \times n) \to M(n \times n)$$

będzie transpozycją, tzn. przekształceniem zadanym wzorem

$$T\left(\{a_{i,j}\}_{1 \le j,j \le n}\right) = \{a_{j,i}\}_{1 \le j,j \le n}\,.$$

Znaleźć jądra i obrazy przekształceń $S = \frac{1}{2}(Id + T)$ i $A = \frac{1}{2}(Id - T)$.

8 Rozważamy podprzestrzenie $W_k \subset \mathbb{K}^n$ dla $k = 1, 2 \ldots n$:

$$W_k = \{x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0\}\,.$$

Opisać wszystkie f izomorfizmy $\mathbb{K}^n$ takie, że $f(W_k) \subset W_k$

9 Udowodnić, że jeśli $\dim V < \infty$, to $W_1 \oplus V \simeq W_2 \oplus V$ wtedy i tylko wtedy gdy $W_1 \simeq W_2$. Podać kontrprzykład, gdy $\dim V = \infty$.

10 Dane dwie podprzestrzenie $W_1, W_2 \subset V$. Załóżmy, że $\dim W_1 = \dim W_2$. Czy zawsze istnieje taki izomorfizm f przestrzeni V, że $f(W_1) = W_2$?

11 Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową, a $J : V \to V$ przekształceniem, takim, że $J^2 = -Id_V$. Wprowadzić w V strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathbb{C}$, tak, że mnożenie przez $i \in \mathbb{C}$ jest przekształceniem J. Wywnioskować, że jeśli $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$, to $\dim_{\mathbb{R}} V$ jest parzysty.

12 Dane przekształcenia $f : V \to W$ i $g : W \to V$. Załóżmy, że $f \circ g = Id_W$. Czy f jest izomorfizmem?

Macierz zamiany współrzędnych od bazy A do bazy B przestrzeni V: *macierz identyczności V w bazach A i B (wektory A wyrażamy jako kombinaje liniowe wektorów B i otrzymane współrzędne ustawiamy w kolumnach).*

13 Niech $\alpha_1 = (1,2)$, $\alpha_2 = (4,1)$. Znaleźć macierz przejścia z bazy α_1, α_2 do bazy standardowej i ze standardowej do α_1, α_2. Niech $\beta_1 = (1,1,1)$, $\beta_2 = (2,1,3)$, $\beta_3 = (1,0,5)$. Znaleźć macierz przekształcenia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\phi(x,y,z) = (x + 2y, y + 3z)$ w bazach β_i i α_i. (Oznaczamy ją $M\phi^\beta_\alpha$.)

14 To samo dla $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,2,3)$, $\alpha_1 = (1,4,9)$; $\beta_1 = (1,2)$, $\beta_2 = (3,1)$ $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\phi(x,y) = (x + y, x - y, x + 2y)$

15 Pokazać. że transpozycja iloczynu jest równa iloczynowi transpozycji w odwrotnej kolejności.

16 Niech $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_1 = (1, 1, 0)$, $\alpha_1 = (1, 0, 0)$. Przekształcenie ϕ jest zadane przez macierz w bazie $\{\alpha_i\}_{i=1,2,3}$:

$$M(\phi)^\alpha_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Znależć obraz i jądro ϕ.

17 Wskazać przekształcenia $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że $\phi\psi \neq 0$, ale $\psi\phi = 0$.

18 Wskazać izomorfizm $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniający dwa warunki:

- $\phi(0, 2, 1) \in \{x + y + z = 0, x - y + 2z = 0\}$,
- $\phi(1, 2, 2) \in \{x - y + 2z = 0\}$.

19 Wskazać przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające 3 warunki
1) $lin\{(-1, 2, 1)\} = ker\, \phi$,
2) $(1, 1, 2) \in im\, \phi$
3) $\phi^3 = 0$.

20 Wskazać przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające 3 warunki
1) $(-1, 2, 1) \in ker\, \phi$,
2) $lin\{(1, 1, 2)\} = im\, \phi$
3) $\phi^3 = 0$.

21 Wykazać, że przekształcenie ϕ spełniające powyższe warunki musi ponadto spełniać: $\phi^2 = 0$ oraz $\dim(ker(\phi)) = 2$.

22 Wkazać, że jeśli przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełnia $\phi^2 = -Id$, to w pewnej bazie ma macierz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

23 Znaleźć wszystkie przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełniające $\phi^4 = Id$ oraz $\phi(1, 2) = (1, 1)$.

24 Znaleźć wszystkie przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełniające $\phi^3 = Id$ oraz $\phi(1, 2) = (1, 1)$.

25 Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełnia warunki: $\phi^3 = Id$, $\phi(v) = v$ dla pewnego $v \neq 0$. Udowodnić, że $\phi = Id$. Czy to samo jest prawdą, jeśli zastąpić $\mathbb{R}$ przez $\mathbb{C}$?

26 Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że jeśli $\phi^2 = \phi$, to $(Id-\phi)^2 = Id-\phi$.

27 Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że jeśli $\phi^2 = \phi$, to $\phi_{|im\, \phi} = Id_{|im\, \phi}$.

28 Niech $\phi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że jeśli $\phi^2 = \phi$, to $V = ker\, \phi \oplus im\, \phi$. Ponadto ϕ jest rzutowaniem na $im\, \phi$. Znaleźć wzór rzutowania na $ker\, \phi$.

29 Niech $S : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Załóżmy, że $S^2 = Id$. Zdefiniujmy

$$V_+ = \{v \in V : Sv = v\}, \qquad V_- = \{v \in V : Sv = -v\}.$$

Przyjmijmy $\phi = \frac{1}{2}(S+Id)$. Udowodnić, że ϕ jest rzutowaniem na podprzestrzeń V_+ wzdłuż V_-. Zdefiniować rzut na V_- za pomocą S.