CZWARTA SERIA ZADAŃ

Zadania z $\natural$ już są zrobione.

1 $\natural$ Niech A i B będą macierzami takiego samego rozmiaru. Udowodnić, że

$$rz(A) + rz(B) \leq rz(A + B)\,.$$

2 a) Ile jest k-tek wektorów liniowo niezależnych w $(\mathbb{Z}_p)^n$?
b) Ile jest baz liniowo niezależnych w $(\mathbb{Z}_p)^n$?
c) Ile jest podprzestrzeni liniowych w $(\mathbb{Z}_p)^n$?

3 Opisać równaniami najmniejszą podprzestrzeń liniową zawierającą wektory:

$$(1,-1,1,-1,1),\ (1,1,0,0,3),\ (3,1,1,-1,7),\ (0,2,-1,1,2)$$

w $\mathbb{R}^5$.

4 $\natural$ Dane wektory w $\mathbb{R}^3$: $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,2,3)$, $\beta_1 = (1,-1,1)$, $\beta_2 = (4,1,2)$. Opisać równaniem $lin(\alpha_1,\alpha_2) \cap lin(\beta_1,\beta_2)$.

5 Niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisane przez równania $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ i $x_3 - x_4 = 0$. Znaleźć równanie przestrzeni zawierającej W i wektor $(1,1,1,2)$.

6 $\natural$ Dane dwie podprzestrzenie w $\mathbb{R}^4$:

$$V = \begin{cases} x & +2y & & -3w & = & 0 \\ x & +y & -2z & & = & 0 \end{cases}, \qquad W = \begin{cases} 3x & +y & -z & -3w & = & 0 \\ x & +y & -z & -w & = & 0 \end{cases}$$

Opisać równaniami $V + W$. Znaleźć wymiary przestrzeni $V + V$ i $V \cap W$.

7 Niech $V = lin((2,4,1,2),(1,-1,1,-2),(4,2,3,-2)) \subset \mathbb{R}^4$ oraz niech W będzie zadane równaniami:

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Znaleźć wymiar przestrzeni $V + V$ i $V \cap W$.

Sumy proste

8 $\natural$ Niech U, $V \subset \mathbb{R}^n$ będą określone układami równań:

$$U = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\} \qquad V = \{x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}\,.$$

Wykazać, że $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ oraz zapisać wektory jednostkowe jako sumy wektorów z U i z V.

9 W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ określamy podprzestrzenie

$$U = lin\{(1,1,1,1),(-1,-2,0,1)\}\,, \qquad V = lin\{(-1,-1,1,-1),(2,2,0,1)\}\,.$$

Wykazać, że $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$ i zapisać wektor $(4,2,4,4)$ jako sumę wektorów z U i z V.

10 $\natural$ Niech U i W będą podprzestrzeniami liniowymi V. Załóżmy, że $\dim V < \infty$ oraz $\dim U + \dim W = \dim V$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:
1) $V = U \oplus W$;
2) $V = U + W$;
3) $U \cap W = \{0\}$.

Rząd macierzy. Tw. Kroneckera-Capellego

11 Znaleźć rzędy macierzy

a)$\natural$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

b)$\natural$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$

12 W zależności od parametru znaleźć rząd macierzy

a) $\begin{pmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & 2 & p-1 \\ p+2 & 3 & p \end{pmatrix}$

c)$\natural$ $\begin{pmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{pmatrix}$

13 Ocenić ile rozwiązań mają układy równań

a) $\begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ 3x + y + z - t = 2 \\ 5x - y + 5z + t = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y + z + 3t = 0 \\ 2x + y - z - 3t = 2 \\ x - 2y + z + 2t = -1 \\ 2x + 3y + z + 3t = 1 \end{cases}$

14 $\natural$ Ocenić ile rozwiązań mają układy równań w zależności od parametru

a) $\begin{cases} (2p+1)x + (p-3)y = p+1 \\ (p+2)x - 2y = 2p \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + py + z = 1 \\ 2x + y + z = p \\ x + y + pz = p^2 \end{cases}$

15 $\natural$ Dane są 4 punkty na płaszczyźnie (a_i, b_i) dla $i = 1, 2, 3, 4$. Jakie warunki muszą spełniać współrzędne aby przez te punkty przechodził okrąg.

16 To samo zadania dla 5 punktów w $\mathbb{R}^3$ i sfery?