Układy wektorów w przestrzeniach liniowych

Zadania z ♮ są zrobione lub nie będziemy do nich wracać

1 ♮ Czy wektor $(1,1,1)$ należy do podprzestrzeni liniowej $(\mathbb{Z}_7)^3$ rozpiętej przez $(1,3,2)$, $(1,2,1)$, $(2,5,3)$? A wektor $(1,4,3)$?

2 ♮ Udowodnić, że każdy wektor przestrzeni $\mathbb{C}^4$ rozpiętej na wektorach

$$(i,1,-i,-1),\ (i,-i,1,-1),\ (1,0,0,-1)$$

spełnia warunek: $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. Natomiast nie każdy spełnia $x_4=-1$.

3 DOM Wykazać, że przecięcie $V_1 \cap V_2$ dwu podprzestrzeni liniowych jest podprzestrzenią liniową.

4 ♮ Znaleźć takie wartości $a \in \mathbb{C}$, by wektory $(a,1,0)$, $(1,a,3)$, $(a,1,1) \in \mathbb{C}^3$ były liniowo zależne.

5 ♮ Czy te układy wektorów są liniowo niezależne?

a) $(1,1,0),\ (1,2,-3),\ (2,4,1)$ w $\mathbb{R}^3$;

b) $(1,2,1,1),\ (2,-1,-1,4),\ (5,5,2,7)$ w $\mathbb{R}^4$;

c) $(3,2,1,-1),\ (5,-1,1,2),\ (7,8,1,-7),\ (1,-1,1,2)$ w $\mathbb{R}^4$.

6 ♮ Czy te układy wektorów rozpinają całą przestrzeń?

a) $(3,1,1),\ (1,0,2),\ (0,3,2)$ w $\mathbb{R}^3$;

b) $(3,1,0,-2),\ (5,2,2,-1),\ (1,-1,0,-2),\ (5,1,1,-3),\ (-7,-3,1,5),$
$(4,1,-2,-5)$ w $\mathbb{R}^4$.

7 ♮ Znaleźć bazy przestrzeni liniowych rozpiętych na wektorach w zadaniu 6.

8 ♮ Znalźć bazy przestrzeni liniowych opisanych przez równania:

a) $x+y+z+t+s=0$ w $\mathbb{R}^5$;

b) $\begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 0 \\ x - 8y + 5z - 9s + t = 0 \end{cases}$ w $\mathbb{R}^5$;

c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$ w $\mathbb{R}^4$.

9 ♮ Znaleźć bazę podprzestrzeni liniowej wielomianów spełniających:

a) $f(1)=f(2)=0$;

b) f jest podzielny przez $(x-1)^2(x+1)$
c) $f(x)=f(-x)$ dla każdego x

10 DOM Wykazać, że jeśli $1+1 \neq 0$ w ciele $\mathbb{K}$ to w przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{K}$ dla dowolnych wektorów $v,w \in V$ zachodzi $lin(v+w, v-w) = lin(v,w)$.

11 DOM wyznaczyć wszystkie watrości parametru p, tak by układ $(2,p,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,3)$ był liniowo niezależny.

12 ♮ Dane są wektory $\alpha_1 = (-1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 2)$, $\alpha_3(t) = (-3, t, 0)$.
a) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ układ α_1, α_2, $\alpha_3(t)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$?
b) dla każdego t takiego jak w a) znaleźć współrzędne wektora $\beta = (1, 1, -1)$ w tej bazie.
c) Dla jakich wartości t wektor $\alpha_3(t)$ jest kombinacją liniową α_1 i α_2? Znaleźć tę kombinację.

13 ♮ Niech V będzie przestrzenią liniową, $\beta \in V$ oraz α_1, $\alpha_2, \ldots,$ α_k będzie układem liniowo niezależnym. Wykazać że $\beta \in lin(\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_k)$ wtedy i tylko wtedy gdy α_1, $\alpha_2, \ldots,$ α_k, β jest liniowo zależny.

14 DOM Niech $\alpha_1 = (1, 3, 1)$, $\alpha_2 = (2, 2, 1)$, $\alpha = (-3, 0, 1)$. Znaleźć (jeśli istnieje) taki wektor α_3, że układ α_1, α_2, α_3 jest bazą $\mathbb{R}^3$ i wektor α ma w tej bazie współrzędne 2,-3, 1.
b) to samo polecenie gdy $\alpha = (3, 5, 2)$.

15 Niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisane przez równania $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ i $x_3 - x_4 = 0$. Czy wektory $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 2)$ można dopełnić wektorem $\beta \in W$ do bazy $\mathbb{R}^4$.

16 Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią liniową. Wykazać, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V$ można dopełnić do bazy wektorami z W wtedy i tulko wtedy gdy:
1) jest układem liniowo niezależnym oraz
2) $Lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ oraz W w sumie rozpinają V.

17 a) Ile jest k-tek wektorów liniowo niezależnych w $(\mathbb{Z}_p)^n$?
b) Ile jest baz liniowo niezależnych w $(\mathbb{Z}_p)^n$?
c) Ile jest podprzestrzeni liniowych w $(\mathbb{Z}_p)^n$?

18 Udowodnić, że istnieje nieprzeliczalny liniowo niezależny podzbiór w przestrzeni funkcji $(\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2\}$.