Zadania z GAL-u 2012

1 Rozwiązać układy równań:

Zadania z $\natural$ są zrobione lub nie będziemy do nich wracać

Zadania z $\spadesuit$ będziemy napewno robić na najbliższych ćwiczeniach

1.1 $\natural$ $\begin{cases} x + 2y + z + t = 7 \\ 2x - y - z + 4t = 2 \\ 5x + 5y + 2z + 7t = 1 \end{cases}$

1.2 $\natural$ $\begin{cases} x + 2y + 3z + t = 1 \\ 2x + 4y - z + 2t = 2 \\ 3x + 6y + 10z + 3t = 3 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$

1.3 $\natural$ $\begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 1 \\ x - 8y + 5z - 9s + t = -1 \end{cases}$

Rozwiązać układy równan zadane przez macierze:

1.4 $\natural$ $\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & -2 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 2 & -5 & 1 & 17 \\ 6 & 5 & 3 & -2 & -9 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & -5 & -10 & 12 \end{array}\right]$

1.5 $\natural$ $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & -6 & 0 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 4 & 0 & 10 \\ -2 & 6 & 4 & 4 & 1 & 10 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right]$

1.6 $\natural$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & 0 \end{array}\right]$ dla a, b $c \in \mathbb{R}$.

1.7 $\left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & 1 & c & c \end{array}\right]$ dla a, b $c \in \mathbb{R}$.

1.8 $\natural$ W zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$ powiedzieć czy układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie / ma wiele rozwiązań / jest sprzeczny:

$$\begin{cases} ax + y + z = a - 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 - a \end{cases}$$

1.9 Niech $F = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$. Zdefiniować w F działania, tak by otrzymać ciało.

1.10 $\natural$ Rozwiązać układ równań nad $\mathbb{Z}_2$ zadany przez macierz: $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

1.11 $\natural$ Ile jest liniowych układów dwóch równań nad $\mathbb{Z}_2$ z dwiema niewiadomymi, które są
– niesprzeczne,
– mają więcej niż jedno rozwiązanie?
Odpowiedzieć na te same pytania dla trzech równań i trzech zmiennych.

1.12 $\natural$
Udowodnić, że w dowolnym ciele są prawdziwe następujące tożsamości
(i)$\natural$ $-(-x) = x$,
(ii) $-(x + y) = (-x) + (-y)$,
(iii) $(-x)y = -xy$,
(iv) $(x - y)z = xz - yz$, gdzie $x - y := x + (-y)$.

1.13 Niech $p > 1$ będzie liczbą naturalną. W zbiorze $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ (reszty z dzielenia przez p) definiujemy działania $a \oplus b = (a+b)\ mod\ p$ oraz $a \odot b = (a \cdot b)\ mod\ p$. Znaleźć p, dla których $(\mathbb{Z}_p, 0, 1, \oplus, \odot)$ jest ciałem. W ciele Z_{11} znaleźć -5 i 5^{-1}, w Z_7 znaleźć -3 i 3^{-1}, w Z_{17} znaleźć -4 i 4^{-1}.

1.14 W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania
a)$\natural$ $\frac{2+i}{z-1+4i} = \frac{1-i}{2z+i}$,
b)$\natural$ $z^2 - 4z + 13 = 0$,
c)$\natural$ $\frac{1}{z} = \frac{1-z}{1}$,
d) $z^8 = 1$,
e)$\natural$ $(z-1)^4 = (i-z)^4$,

1.15 Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiór liczb spełniających warunek:
a)$\natural$ $Re(iz + 2) > 0$,
b) $(\overline{z - i})^2 = (z - i)^2$,
c)$\natural$ $Im\frac{1+iz}{1-iz} = 1$,
d)$\spadesuit$ $\left|\frac{z-2i}{z+1}\right| = 1$,
e) $arg(z^6) = \pi$,
f)$\spadesuit$ $arg(\overline{z} - 1 - 2i) = \frac{3\pi}{2}$,
g) $|z|^3 = iz^3$,
h)$\natural$ $im(iz^4 + 2) \geq 0$.

1.16 Zapisać w postaci trygonometrycznej liczby
a)$\spadesuit$ $-2 + 2i$,
b)$\spadesuit$ $\sqrt{3} - i$,
c)$\spadesuit$ $-5 + 5\sqrt{3}i$.

1.17 $\spadesuit$ Obiliczyć wyrażenia (wynik w postaci $a + bi$)
a) $(1 - i)^{12}$,
b) $(1 + \sqrt{3}i)^8$,
c) $\frac{(1+i)^{22}}{(1-\sqrt{3}i)^6}$.

1.18 $\spadesuit$ Korzystając ze wzoru Moivre'a wyrazić $\cos(7x)$ przez funkcje $\cos(x)$.

1.19 $\spadesuit$ Obiczyć
a) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$
(wsk. ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego),
b) $\binom{2n}{0} - \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} - \ldots + (-1)^n \binom{2n}{2n}$.