Funkcje Analityczne Grupa 3, jesień 2008

Czternasta porcja zadań.

Uwaga: i) W każdym zadaniu można korzystać z poprzednich jego części i innych zadań, nawet, jeśli się ich nie rozwiązało.

ii) Wcześniejsze porcje zapisane są dalej, w odwróconej kolejności.

iii) Na ćwiczeniach proszę też zgłaszać rozwiązanie nie omawianych dotąd zadań wcześniejszych serii.

UWAGA Poniżej zamieszczam drugą porcję pisemnej pracy domowej. Ci, którzy chcą uzyskać za nią jakiekolwiek punkty (za obie porcje można uzyskać łącznie 5 z 30p), powinni oddać ją w piątek na początku ćwiczeń. Jeśli jednak otrzymam ją do środy 21 bm do godz. 14.45, to umożliwi mi to sprawdzenie jej do piątku i zwrot na ćwiczeniach z ew. uwagami. Prace można wkładać do koperty wiszącej przy drzwiach mego gabinetu 5560. (Również zaległą pierwszą porcję pracy pisemnej można tam wkładać do wtorku 20 bm, godz. 12.)

Pisemna praca domowa

Obliczyć następujące całki:

a) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{a+b\cos x}\mathrm{d}x$, gdzie $a > b > 0$. (Por. porcja 12.)

b) $\int_0^{\infty} \frac{x^6}{(1+x^4)^2}\mathrm{d}x$.

c) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x$. (Wskazówka: lemat Jordana z ostatnich ćwiczeń, patrz też np. w skrypcie §IV.9.)

Jako „zwykłą” (ustną) pracę domową wyznaczam zadania:

1. W oparciu o tw. Rouche’go znaleźć sumę krotności pierwiastków równania $f(z) = 0$, leżących w dysku $|z| < 1$, gdy

a) $f(z) = z^7 - 5z^3 + z^2 - 2$, b) $f(z) = z^9 - 2z^6 + z^2 + 8z_2$

2. Dowieść, że dla $a > e$ równanie $az^n = \exp(z)$ ma w kole $|z| < 1$ dokładnie n pierwiastków (uwzględniając krotności).

3. Przemyśleć rozwiązanie dowolnego z zadań 3.9.2. 3.9.3, 3.9.4 ze zbioru Krzyża, wykorzystującego „zasadę argumentu”.

4. Przemyśleć wyliczenie całki $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, podanego w podręcznikach (patrz też skrypt, §IV .9) i w podobny sposób wyznaczyć $\int_0^{\infty} (\frac{\sin x}{x})^2\mathrm{d}x$.

Trzynasta porcja zadań.

UWAGA W miejsce ćwiczeń, zajętych przez kolokwium, odbędą się dodatkowe ćwiczenia w CZWARTEK 15 I, w godz. 16.15–17.45, w sali 2070.

UWAGA Na ćwiczenia piątkowe wyznaczona jest następująca pisemna praca domowa:

1. Rozwinąć funkcję $1/(z-1)(z-2)$ w szereg Laurenta w pierścieniu $1 < |z| < 2$. (Użyć rozkładu na ułamki proste.)

2. Dla następujących funkcji, określić rodzaj każdego z jej punktów osobliwych (w przypadku biegunów wyznaczyć ich krotność) i residuum funkcji w tym punkcie:
a) $f = \mathrm{tg}^2$; b) $f(z) = (1-\cos z)/z^2$; c) $f = 1/(\cos + \sin)$.

Jako zadania „ustne" na ćwiczenia w czwartek proszę przemyśleć nierozwiązane zadania ostatnich dwóch serii.

Dwunasta porcja zadań.

Zadania 1-3 pochodzą z kolokwium grupy prof. Oleszkiewicza.

1. Rozwinąć funkcję $g(z) = 1/(z^2+1)$ w szereg Laurenta o środku w punkcie $z_0 = i$. Współczynniki proszę przedstawić explicite - bez użycia całek, sum nieskończonych itp. (Zadanie to odpowiada zadaniu 3 „naszego" kolokwium, które wypadło najsłabiej. Oba zadania proszę przemyśleć; wskazówka to rozkład na ułamki proste.)

2. Niech $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ dla $x \in (0, \infty)$. Czy istnieje funkcja holomorficzna $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taka, że $h(x) = Si(x)$ dla $x > 0$?

3. Czy istnieje szereg potęgowy zmiennej zespolonej z, o środku w 0 i nieskończonym promieniu zbieżności, który jest niemal jednostajnie zbieżny w zbiorze $U = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$, nie jest w tym zbiorze jednostajnie zbieżny, i którego suma jest funkcją ograniczoną na U?

Przypomnienie. **Twierdzenie o residuach** orzeka, że jeśli pętla $\gamma : [a,b] \to U$ jest w zbiorze otwartym U homotopijnie trywialna (tzn. homotopijna z pętlą stałą), zaś funkcja f jest określona i holomorficzna w $U \setminus P$, gdzie P jest pewnym skończonym podzbiorem zbioru $U \setminus \gamma([a,b])$, to $\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{p \in P} \mathrm{res}_p(f) \cdot \mathrm{ind}_p(\gamma)$, gdzie $\mathrm{ind}_p(\gamma)$ to „indeks punktu p względem pętli γ", wyznaczający ile razy pętla γ okrąża punkt p. (Ścisła definicja będzie omówiona na wykładzie; dla nas ważne jest to, że dla dysku D zachodzi $\mathrm{ind}_p(\partial D) = 1$ gdy $p \in D$ i $\mathrm{ind}_p(\partial D) = 0$ gdy $p \notin \overline{D}$.)

Twierdzenie to sprowadza obliczenie rozważanej całki do wyznaczenia residuów funkcji podcałkowej w jej punktach osobliwych (gdy wszystkie one są izolowane).

4. Udowodnić, że gdy f jest funkcją dwóch zmiennych rzeczywistych, ciągłą na brzegu koła jednostkowego $D = D(0,1)$, to $\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\mathrm{d}t = \int_{\partial D} g(z)\mathrm{d}z$, gdzie $g(z) := \frac{1}{\mathbf{i}z}\, f(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2\mathbf{i}}(z - z^{-1}))$ dla $z \in \partial D$.

5. Wykorzystując zadanie 4, wyznaczyć poniższe całki:

a) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1-2a\cos t+a^2}$, gdzie $a \in (0,1)$, b) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{(2+\cos t)^2}$, c) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t+a}$, gdzie $a > 1$. Wskazówka: wychodząc z zadanej funkcji podcałkowej $f(\cos t, \sin t)$ wyznaczyć odpowiadającą jej funkcję g, przedłużyć ją do funkcji mającej w dysku D tylko skończenie wiele izolowanych osobliwości i obliczyć $\int_{\partial D} g$ w oparciu o twierdzenie o residuach.

Jedenasta porcja zadań.

1. (Uzupełnienie zadania z ćwiczeń.) Dowieść, że nie istnieje funkcja f, holomorficzna w dysku $D = D(0,1)$, ciągła w $\overline{D}$ i taka, że $f(z) = \overline{z}$ dla $z \in \partial D$, na następującej drodze:

a) dla funkcji tej prawdziwy byłby wzór całkowy Cauchy'ego (to uzasadniono na ćwiczeniach). Wywnioskować stąd, że zachodziłoby $f(re^{i\alpha}) = e^{-i\alpha}g(r)$, a zatem i $f(z) = \overline{z}h(|z|)$ dla pewnych funkcji g, h.

b) Korzystając z równań CR dowieść, że $h(t) = c/t^2$ i wobec tego $f(z) = c/z$, dla pewnej stałej c – a więc funkcja f NIE jest określona na całym dysku D.

Przypomnienie. Niech funkcja f będzie holomorficzna w otoczeniu nakłutym punktu p i niech $g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-p)^k$ będzie jej rozwinięciem Laurenta wokół p. („Otoczenie nakłute" punktu p to otoczenie, z którego być może usunięto punkt p.) Ważne okaże się wyznaczenie następujących wielkości:

* współczynnika c_{-1}, który nazywa się **residuum** funkcji f w punkcie z_0; będę je oznaczał $\mathrm{res}_p(f)$, oraz

* liczby $k = \inf\{i : c_i \neq 0\}$, którą oznaczę $k(p)$ lub $k_f(p)$. Gdy $k \neq -\infty$, to nazwę ją **krotnością punktu** p **jako uogólnionego zera funkcji** f, choć nazwa ta nie jest ogólnie przyjęta. Jest ona związana z krotnością zera omawianą na ostatnich ćwiczeniach tym, że –jak wówczas– w pewnym otoczeniu nakłutym V zachodzi $f(z) = (z-p)^k g(z)$ dla pewnej funkcji $g \in H(V \cup \{p\})$ takiej, że $g(p) \neq 0$; różnica jest ta, że teraz dopuszczamy możliwość, iż $k < 0$. (Pomijam tu przypadek, gdy $k = -\infty$, tzn. f ma w punkcie p **osobliwość istotną**.)

Sposoby wyznaczania $k(p)$ i $\mathrm{res}_p f$ omówione są w podręcznikach; w skrypcie przedstawiam je na przykładach w §4.2. (Wprowadziłem tam nieznaczne zmiany, więc proszę zajrzeć do ostatniej wersji.)

2. Wyznaczyć liczbę $k_f(p)$ dla każdego punktu p, w którym funkcja f jest nieokreślona, gdy:

a) $f(z) = \sin(1/z)$;

b) $f = 1/\sin^2$;

c) $f(z) = 1/(z^2 - z^4)$;

d) $f(z) = (1 - \cos z)/z^2$;

e) $f(z) = (1 - e^z)/(1 + e^z)$;

f) $f(z) = (e^z - 1)^{-1} \exp(1/(1-z))$.

3. We wszystkich punktach nieokreśloności funkcji f znaleźć jej residuum, gdy

a) $f(z) = (z^2+1)/(z-2)$

b) $f(z) = \cos z/(z-i)$

c) $f(z) = z^2/(z^2+1)^2$

d) $f(z) = ze^{1/z}$.

4. Jak w zadaniu 2, gdy

a) $f(z) = z^{n-1}/(z^n + a^n)$

b) $f(z) = e^z/(z-1)^4$

c) $f(z) = \sin\big(z/(z+1)\big)$

d) $f(z) = z^n \sin(1/z)$; rozważyć każdą całkowitą wartość n.

Dziesiąta porcja zadań.

Przypomnienie Niech funkcja g będzie holomorficzna w otoczeniu punktu z_0 i niech $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ będzie jej rozwinięciem Taylora wokół punktu z_0. Mówimy, że liczba $n = 0, 1, \ldots$ jest **krotnością punktu** z_0 **jako zera funkcji** g, jeśli $c_n \neq 0$ i $c_i = 0$ dla $i < n$. Jest to równoważne temu, by $g(z) = (z-z_0)^n h(z)$, gdzie funkcja h jest holomorficzna w otoczeniu punktu z_0 i $h(z_0) \neq 0$. (W szczególności, jeśli krotność z_0 jako zera funkcji f jest zerowa, to z_0 nie jest w potocznym sensie zerem tej funkcji.) Zauważmy, że gdy z_0 jest zerem k–krotnym funkcji g_1 i l-krotnym funkcji g_2, to jest zerem $k+l$–krotnym funkcji $g_1 g_2$.

Uwaga 1. a) Gdy funkcje f i g są holomorficzne w kole domkniętym $\overline{D}$, a g ma w nim jedyne miejsce zerowe $z_0 \in D$, krotności n, to $\int_{\partial D} f/g$ można wyliczyć, pisząc $g(z) = (z-z_0)^n h(z)$ i stosując wzór Cauchy'ego, wyznaczający $\int_{\partial D} \frac{(f/h)(z)}{(z-z_0)^n} \mathrm{d}z$.

b) Gdy $n = 1$, to nie musimy do tego znać „całej" funkcji h, a tylko jej wartość $h(z_0)$ (i wartość $f(z_0)$).

c) Zaś $h(z_0)$ jest równe współczynnikowi c_1 rozwinięcia Taylora funkcji g wokół z_0, a tym samym równe $g'(z_0)/1!$. Dla $n > 1$ podobnie otrzymujemy wzory na $(f/h)^{(n-1)}(z_0)$, zależne od kolejnych pochodnych, w punkcie z_0, funkcji f i g.

1. Wyznaczyć krotność każdego z miejsc zerowych funkcji $(\sin z - 1)^2 \sin z$.

2. Obliczyć $\int_{\partial D} f(z)\mathrm{d}z$, gdy okrąg ∂D zorientowany jest dodatnio i

a) $f(z) = e^z \cos z/(1+z^2)\sin z, \quad D = D(1+i, 5/4)$;

b) $f(z) = z/(0.5 - \sin^2 z), \quad D = D(\pi/4, 1)$;

c) f jest jak wyżej i $D = D(0,1)$;

d) $f(z) = 1/(\sin z - 1)^2 \sin z, \quad D = D(0,1)$;

e) f jest jak w d) i $D = D(\pi/2, 1)$;

f) f jest jak w d) i $D = D(1+i, 2)$.

3. Udowodnić następującą **regułę de L'Hospitala**: Gdy funkcje f i g są w pewnym dysku $D = D(p, r)$ holomorficzne, lecz nie są stałe, to w $\widetilde{\mathbb{C}}$ granica $\lim_{z\to p} f(z)/g(z)$ istnieje i jest równa $\lim_{z\to p} f'(z)/g'(z)$.

4. Niech 0 będzie zerem k–krotnym funkcji g i l–krotnym funkcji h. Gdy $k > 0$, to ilukrotnym jest 0 zerem złożenia $h \circ g$?

Dziewiąta porcja zadań.

Uwagi dotyczące wzoru całkowego Cauchy'ego:

a) Gdy $f \in H(U)$ i $z \in D$, gdzie D jest dyskiem którego domknięcie jest zawarte w U, to we wzorze $f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-z_0} \mathrm{d}z$ można zmienić całkowanie po okręgu ∂D na całkowanie po dowolnej pętli, która w zbiorze $U \setminus \{z_0\}$ jest homotopijna z pętlą ∂D. Wynika to stąd, że wartość obu całek jest taka sama, na podstawie wcześniejszego twierdzenia Cauchy'ego.

b) Gdy całkujemy po pętli γ funkcje f/g, to czasem uda się rozłożyć mianownik g w iloczyn $h(z)(z-z_0)^k$, dla pewnej funkcji holomorficznej h i pewnych $k \in \mathbb{N}$ i $z_0 \in \mathbb{C}$. Wówczas badaną całkę można starać się wyznaczyć stosując wzór Cauchy'ego na odpowiednią pochodną funkcji f/h.

Proszę się tymi uwagami kierować poniżej. Wszystkie pętle orientujemy dodatnio.

1. Wyznaczyć całkę $\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$, gdy Γ jest a) okręgiem $|z-i| = 1$, b) okręgiem $|z+i| = 1$, c) okręgiem $|z| = 1/2$, d) elipsą $x^2 + 4y^2 = 1$.

2. Obliczyć $\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$, gdy $f(z) = e^z \cos z \sin z/(1+z^2)$ i Γ jest

a) okręgiem o środku w $1+i$ i promieniu $3/2$,

b) prostokątem o wierzchołkach $-1/2, 1, 1+2i, (-1/2)+2i$.

3. To samo, gdy $f(z) = e^z/(z+2)^4$, zaś Γ jest a) brzegiem koła zawierającego punkt -2, b) brzegiem koła nie zawierającego tego punktu.

4. To samo, gdy $f(z) = \sin(\pi z/4)/(z^2-1)$ i Γ jest okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Proszę też pamiętać wcześniejszych zadaniach, których dotąd nie omawiano.

Ósma porcja zadań.

1. Udowodnić, że moduły liczb $\cos(2i)$ i $\cos(3i)$ są większe od 1.

2. a) W oparciu o równania Cauchy'ego-Riemanna wyznaczyć funkcję holomorficzną $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wiedząc, że funkcja $u(x,y) = (\mathrm{Re} f)(x+iy)$ jest równa $x^2 - y^2 + xy$ dla $x, y \in \mathbb{R}$.
Wskazówka: Napisać $f = u + iv$, gdzie $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i wyznaczyć $\partial_x v$ i $\partial_y v$ przy pomocy równań CR; następnie znaleźć v, jako funkcję zmiennych x i y. (Jest ona wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do stałej.)

b) Wyznaczyć f jako funkcję zmiennej z.
Wskazówka: Można zgadnąć rozwiązanie lub dojść do niego np. tak. W otrzymanym wzorze na $f(x,y)$ przyjmijmy $y = 0$. Da to funkcję jednej zmiennej–dotychczas była ona nazwana x, lecz teraz zmieńmy oznaczenia na z. Twierdzę, że wzór, który tak otrzymamy, jest szukanym. Proszę to uzasadnić samodzielnie, korzystając z zasady

izolowanych zer.

3. Analogiczne polecenia jak wyżej, gdy
i) $v(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + x$,
ii) $u(x, y) = 2e^x \sin y$
iii) $v(x, y) = 2xy + 3x$.

4. Wyznaczyć następujące całki krzywoliniowe (gdzie można, starać się ułatwić sobie zadanie, korzystając z udowodnionych na wykładzie twierdzeń):
a) $\int_C \exp(\overline{z})\mathrm{d}z$, gdzie C to łamana abc, przy $a = 0, b = 1, c = 1 + i$.
b) $\int_C \exp(z)\mathrm{d}z$, gdzie C jest j.w.
c) $\int_\gamma |z|\mathrm{d}z$, gdzie $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$ dla $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.
d) $\int_\gamma z\mathrm{d}z$, gdzie γ jest j.w.
e) $\int_\gamma \sin(2z + 1)\mathrm{d}z$, gdzie z jest j.w.

5. Niech U oznacza obszar ograniczony okręgiem jednostkowym $C = \{z : |z| = 1\}$ i prostą L, styczną do niego w punkcie i. Przekształcić ten obszar w sposób różnowartościowy i holomorficzny na
a) pas $\mathrm{Im}z \in (0, \pi)$;
b) górną półpłaszczyznę $\mathrm{Im}z > 0$.

6. Każdy dysk o promieniu $\pi\sqrt{2}$ zawiera punkt z taki, że $\cos z \in \mathbb{Z}$. (Wskazówka: $\cos^{-1}(\mathbb{Z}) = iA + 2\pi\mathbb{Z}$ dla pewnego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ takiego, że $\mathrm{dist}(t, A) < 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$.)

Siódma porcja zadań.

1. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $\cos z = (3 + i)/4$ takie, że $\mathrm{Re}z \in [0, 2\pi)$.

2. Funkcję $1/\cos$ rozwijamy w szereg Taylora wokół zera. Wyznaczyć pierwsze trzy współczynniki tego szeregu, w oparciu o to, że jego iloczyn Cauchy'ego z szeregiem funcji cos jest równy $1 + 0z + 0z^2 + \ldots$.

3. Zrobić to samo dla następujących funkcji
a) $\cos^2$,
b) $\sqrt{\cos}$ (bierzemy tę gałąź pierwiastka, która jest ciągła na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$),
c) $\exp \circ \exp$.

4. Wyznaczyć całkę $\int_\Gamma (\mathrm{Re}z)\mathrm{d}z$, gdy Γ jest a) odcinkiem $[0, 1 + i]$, b) okręgiem jednostkowym o środku w zerze.

Uwaga: odcinek orientujemy tak, by punkt 0 był jego początkiem, a okrąg tak, by jego obieg był przeciwny do ruchu wskazówek zegara.

5. Wyznaczyć całkę $\int_\Gamma |z|\mathrm{d}z$, gdy Γ jest
a) odcinkiem $[-i, i]$, o początku w i,
b) prawym półokręgiem okręgu jednostkowego, o początku w $-i$,

c) lewym półokręgiem okręgu jednostkowego, o początku w i.

6. a) Dowieść, że gdy $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{w-z_j} = 0$, to punkt w należy do uwypuklenia zbioru $\{z_1, \ldots, z_k\}$, tzn. $w = \sum_{j=1}^{k} t_j z_j$ dla pewnych liczby nieujemnych $t_1, \ldots, t_k$, spełniających warunek $\sum_j t_j = 1$.

b) W oparciu o to, udowodnić **twierdzenie Gaussa–Lucasa**: każde miejsce zerowe pochodnej wielomianu p leży w uwypukleniu zbioru miejsc zerowych tego wielomianu. (Wskazówka: zasadnicze twierdzenie algebry.)

Szósta porcja zadań.

1. Zbadać, dla jakich liczb zespolonych z, ciąg $a_n = 1 + z + \cdots + z^n$ jest zbieżny
a) w $\mathbb{C}$, b) w $\widetilde{\mathbb{C}}$.

2. a) Korzystając ze wzoru na sumę postępu geometrycznego, na pewnym dysku o środku w i rozwinąć funkcję $1/z$ w szereg potęgowy wokół i. Jaki jest promień zbieżności tego szeregu?

b) To samo z funkcja $1/z^2$. (Skorzystać z a).)

3. Udowodnić, że jeśli suma szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, mającego promień zbieżności $r > 0$, jest rzeczywista dla $z \in (0, r/2)$, to wszystkie współczynniki a_n są rzeczywiste.

4. a) Udowodnić, że funkcja $\cos(1/z)$ jest holomorficzna w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ i istnieje ciąg jej miejsc zerowych, mający w $\mathbb{C}$ punkt skupienia.

b) Zbadać, w których punktach holomorficzna jest funkcja $f(z) = z\mathrm{Re}z$, i to samo z funkcją $g(z) = 2xy - i(x^2 - y^2)$ dla $z = x + yi$.

5. Przekształcić konforemnie zbiór $x > 0, y > 0$ na dysk $|z| < 1$ tak, by punkt $(1, 1)$ przeszedł na środek koła.

Proszę też pamiętać o nieomawianych zadaniach wcześniejszych!

Piąta porcja zadań.

Przypominam o jednym z początkowych zadań – by przeczytać o własnościach funkcji $\exp$. Obecnie „dorzucam" do tego też funkcje trygonometryczne cos i sin.

1. a) Dowieść, że dla dowolnej zespolonej liczby w i rzeczywistej α równanie $e^z = w$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w pasie $\mathrm{Im}z - \alpha \in (0, 2\pi)$.

b) Gdy $\alpha = 0$, wyznaczyć obraz tego pasa oraz zawartych w nim odcinków $\mathrm{Re}z = x_0$ i prostych $\mathrm{Im}z = y_0$.

2. Naszkicować obraz przy przekształceniu $z \mapsto e^z$
a) prostej $y = x$

b) pasa $y - x \in (0, 2\pi)$.

3. Dowieść, że $\sin \overline{z} = \overline{\sin z}$ i podobnie dla funkcji cos.

4. a) Czym jest obraz półpłaszczyzny $\mathrm{Im} z > 0$ przy funkcji cos?
b) Jaki jest zbiór wartości funkcji $\mathrm{tg} = \sin / \cos$?

5. Zbadać, dla jakich z funkcje $\cos, \sin, \mathrm{tg}$ przyjmują wartości a) czysto rzeczywiste, b) czysto urojone.

6. Przedstawić każdą z funkcji cosh i sinh w postaci $u + iv$, gdzie u i v przyjmują wartości rzeczywiste. (Tu $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$ i $\sinh z = (e^z - e^{-z})/2$.)

7. Dowieść, że w kole $D(0, r)$ zachodzą nierówności $|\sin z| \leq \cosh r$, $|\cos z| \leq \cosh r$.

Czwarta porcja zadań.

1. Udowodnić, że pole trójkąta o wierzchołkach $0, z_1, z_2$ jest równe $|\mathrm{Im}(z_1 \overline{z_2})|/2$.

2. Niech $f(z) = |z|^2$ i $s(z) = \overline{z}$. Dla każdej z tych funkcji $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wyznaczyć pochodną i zbiór punktów różniczkowalności, gdy różniczkowanie rozumiane jest

a) w sensie rzeczywistym (tzn. tak, jak na Analizie 2, przy czym $\mathbb{C}$ utożsamiamy z $\mathbb{R}^2$; wyznaczenie pochodnej polega na podaniu jej macierzy w standardowej bazie przestrzeni $\mathbb{R}^2$);

b) w sensie zespolonym (wtedy pochodna, gdy istnieje, jest liczbą zespoloną).

3. Dowieść, że jeśli w punkcie p istnieje pochodna zespolona funkcji $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, to w punkcie $\overline{p}$ istnieje pochodna zespolona funkcji $g = s \circ f \circ s$, gdzie $s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ to sprzężenie $z \mapsto \overline{z}$.

4. Przekształcić konforemnie soczewkę $\{z : |z| < 1 \text{ i } |z - \sqrt{3}| > 2\}$ na górną półpłaszczyznę.

5. a) Dowieść, że jeśli homografia h ma dokładnie jeden punkt stały p, to dla pewnej stałej $a \neq 0$, obraz $w = h(z)$ dowolnego punktu z jest z tym punktem związany równaniem $\frac{1}{w-p} = a + \frac{1}{z-p}$.

b) Podobnie jest, gdy h ma dwa różne punkty stałe p, q, a równanie ma postać $\frac{w-p}{w-q} = a\frac{z-p}{z-q}$.

+zadania z poprzednich serii, przede wszystkim zadania 6 i 7 z §I.6.C skryptu.

Trzecia porcja zadań.

1. a) Określić wzorem homografię, przekształcającą punkty $-i, 1, i$ na $-1, 0, 1$, odpowiednio.

b) Określić wzorem przekształcenie Möbiusa, przekształcające punkty $\infty, 0, 1$ na $0, 1, \infty$, odpowiednio, zaś górną półpłaszczyznę $\mathrm{Im} z > 0$ na półpłaszczyznę dolną

$\mathrm{Im} z < 0$.

2. Znaleźć zbiór $h(X)$, gdy

a) $h(z) = (z-1)/(z+1)$, a X to dysk $\{z\colon |z| < 1\}$.

b) $h(z) = (z-i)/(z+i)$, a X jest częścią wspólną kół o promieniu $\sqrt{2}$ i środkach w -1 i 1, odpowiednio.

3. a) Znaleźć homografię, przekształcającą półkole $\{z : |z| < 1, \mathrm{Im} z > 0\}$ na ćwiartkę $\{z : \mathrm{Im} z > 0, \mathrm{Re} z > 0\}$.

b) Przekształcić powyższe półkole konforemnie na półpłaszczyznę.

c) Przekształcić konforemnie na półpłaszczyznę część wspólną kół o promieniu 1 i środkach w 0 i 1, odpowiednio.

4. =zadanie 6 z §I.6.C skryptu (było już w serii 1).

5. =zadanie 7 z §I.6.C skryptu.

+ przypominam o innych nierozwiązanych zadaniach wcześniejszych serii!

Druga porcja zadań.

1. Zbadać, w co przechodzi przy przekształceniu $z \mapsto 1/z$

a) rodzina prostych równoległych $y = x + b,\ b \in \mathbb{R}$;

b) prosta $y = kx,\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

c) rodzina prostych przechodzących przez punkt $z_0 \neq 0$;

d) parabola $y = x^2$ (znaleźć równanie obrazu).

Jako kolejne wyznaczone są zadania 4 i dalsze z poprzedniej serii.

Pierwsza porcja zadań.

a) Proszę opanować wiadomości o przekształceniach Moebiusa ze stron 15-16 skryptu, tzn. rozwiązać zadania 1-6 dotyczące tych przekształceń.

b) Proszę jako kolejne rozwiązać 2 zadania ze strony 3.

Skrypt jest wywieszony na stronie
http://www.mimuw.edu.pl/ torunczy/FA/

c) (jako zdanie 9): proszę zaznajomić się z opisem funkcji exp. (Źródło dowolne, zawsze dobrze jest sięgać do różnych.)