A

1.(10p) Znaleźć granicę $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+7n+3} - \sqrt{n^2+2n+8}$.

Rozwiązanie: $\cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+7n+3)-(n^2+2n+8)}{\sqrt{n^2+7n+3}+\sqrt{n^2+2n+8}} =$
$\lim_{n\to\infty} \frac{(5n-5)/n}{(\sqrt{n^2+7n+3}+\sqrt{n^2+2n+8})/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-5/n}{(\sqrt{1+7/n+3/n^2}+\sqrt{1+2/n+8/n^2})} =$
$\frac{5}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 5/2$

2.(15p) Znaleźć granicę $\lim_{x\to 1} \frac{x^{900}-x^{600}+5x^{300}-5}{8x^{900}-8x^{600}+4x^{300}-4}$.

Rozwiązanie:
$\cdots = \lim_{x\to 1} \frac{x^{600}(x^{300}-1)+5(x^{300}-1)}{8x^{600}(x^{300}-1)+4(x^{300}-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{600}+5}{8x^{600}+4} = \frac{1+5}{8+4} = 1/2$

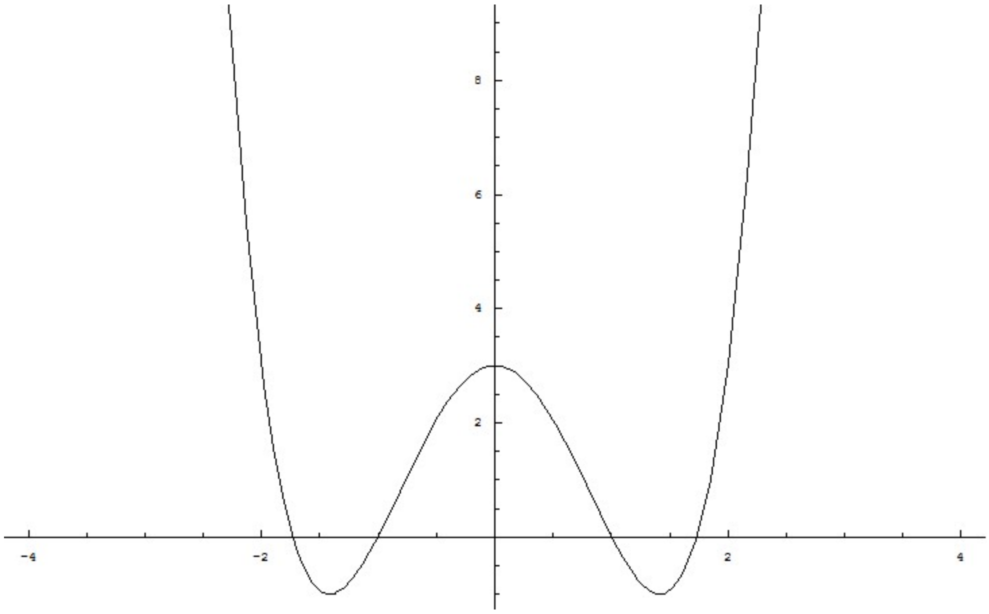
3.(20p) Ile rozwiązań ma równanie:
a) $e^{2x} = 2x$?
b) $e^{2x} = 2x + 1$?
c) $e^{2x} = 2x + 2$?

Rozwiązanie:
badamy $f(x) = e^{2x} - 2x$. Pochodna $f'(x) = 2e^{2x} - 2 = 2(e^{2x} - 1)$. Dla $x < 0$ mamy $f'(x) < 0$, a dla $x > 0$ mamy $f'(0) > 0$. Czyli na $(-\infty, 0]$ f maleje, na $[0, \infty)$ rośnie, w 0 ma minimum, $f(0) = 1$. Stąd:
a) $f(x) = 0$ nie ma rozwiązań,
b) $f(x) = 1$ ma jedno rozwiązanie (minimum),
c) $f(x) = 2$ ma 2 rozwiązania (po jednym na każdej półprostej, co wynika z tw. Darboux zastosowanego do naszej ciągłej i monotonicznej na tych półprostych funkcji).

4.(20p) Zbadać funkcję (zera, przedziały monotoniczności, przedziały wypukłości, ekstrema lokalne, granice w końcach dziedziny). Naszkicować wykres. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$.

Rozwiązanie: $f(x) = (x^2-1)(x^2-3) = (x-1)(x+1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.
Zera: $x = \pm 1$, $\pm\sqrt{3}$;
granice w $\pm\infty$ są równe $+\infty$;
$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$; zeruje się dla $x = 0$, $\pm\sqrt{2}$;
f' dodatnia na przedziale $(-\sqrt{2}, 0)$ i na przedziale $(\sqrt{2}, +\infty)$, ujemna na $(-\infty, -\sqrt{2})$ i na $(0, \sqrt{2})$;
Zatem: f rośnie na przedziale $[-\sqrt{2}, 0]$ i na przedziale $[\sqrt{2}, +\infty)$, maleje na $(-\infty, -\sqrt{2}]$ i na $[0, \sqrt{2}]$;
lokalne mimima: $f(\pm\sqrt{2}) = -1$, lokalne maksimum f(0)=3.
$f''(x) = 12x^2 - 8 = 4(\sqrt{3} - \sqrt{2}x)(\sqrt{3} + \sqrt{2}x)$; zeruje się dla $x = \pm\sqrt{2/3}$;
f'' dodatnia na $(-\infty, -\sqrt{2/3})$ i na $(\sqrt{2/3}, +\infty)$, ujemna na $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$;
f wypukła na $(-\infty, -\sqrt{2/3}]$ i na $[\sqrt{2/3}, +\infty)$, wklęsła na $[-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}]$;

Rysunek



5.(20p) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = e^{2x}(|x| - 3)$ na odcinku domkniętym $[-4, 4]$.

Rozwiązanie:
1) wartości w końcach: $f(-4) = \mathbf{e^{-8}}$, $f(4) = \mathbf{e^8}$
2) wartość w punkcie, w którym nie istnieje pochodna w $f(0) = \mathbf{-3}$
3) na przedziale $(-4, 0)$: $f(x) = e^{2x}(-x-3)$, $f'(x) = e^{2x}(-2x-7)$;
$f'(-7/2) = 0$, $f(-7/2) = \mathbf{e^{-7}/2}$
4) na przedziale $(0, 4)$: $f(x) = e^{2x}(x-3)$, $f'(x) = e^{2x}(2x-5)$.
$f'(5/2) = 0$, $f(5/2) = \mathbf{-e^5/2}$

Z powyższych obliczeń wynika, że jedynymi punktami, w których funkcja może mieć ekstrema lokalne są $\pm 4, 0, -7/2, 5/2$, tymczasem tw. Weierstrassa gwarantuje, że funkcja ciągła na przedziale domkniętym musi przyjąć swoją wartość największą i najmniejszą, które automatycznie są ekstremami lokalnymi. Zatem z porównania wartości funkcji w tych punktach wnioskujemy, że $\max(f) = f(4) = e^8$, $\min(f) = f(5/2) = -e^5/2$.

6.(15p) Znaleźć granicę $\lim_{x\to 0} \frac{x(e^{7x}-1)}{\sin(9x^2)}$.

Rozwiązanie: $\dots = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{7x}-1)/7x}{\sin(9x^2)/9x^2} \frac{7}{9} = \frac{\lim_{x\to 0}(e^{7x}-1)/7x}{\lim_{x\to 0}\sin(9x^2)/9x^2} \frac{7}{9} = \frac{7}{9}$

B

1.(10p) Znaleźć granicę $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+9n+2} - \sqrt{n^2+8n+1}\,.$

Rozwiązanie: $\dots = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+9n+2)-(n^2+2n+8)}{\sqrt{n^2+9n+2}+\sqrt{n^2+8n+1}} =$
$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)/n}{(\sqrt{n^2+9n+2}+\sqrt{n^2+8n+1})/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1/n}{(\sqrt{1+9/n+2/n^2}+\sqrt{1+8/n+1/n^2})} =$
$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 1/2$

2.(15p) Znaleźć granicę $\lim_{x\to 1} \frac{x^{900}-x^{600}+2x^{300}-2}{7x^{900}-7x^{600}+6x^{300}-6}.$

Rozwiązanie:
$\dots = \lim_{x\to 1} \frac{x^{600}(x^{300}-1)+2(x^{300}-1)}{7x^{600}(x^{300}-1)+6(x^{300}-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{600}+2}{7x^{600}+6} = \frac{1+2}{7+6} = 3/13$

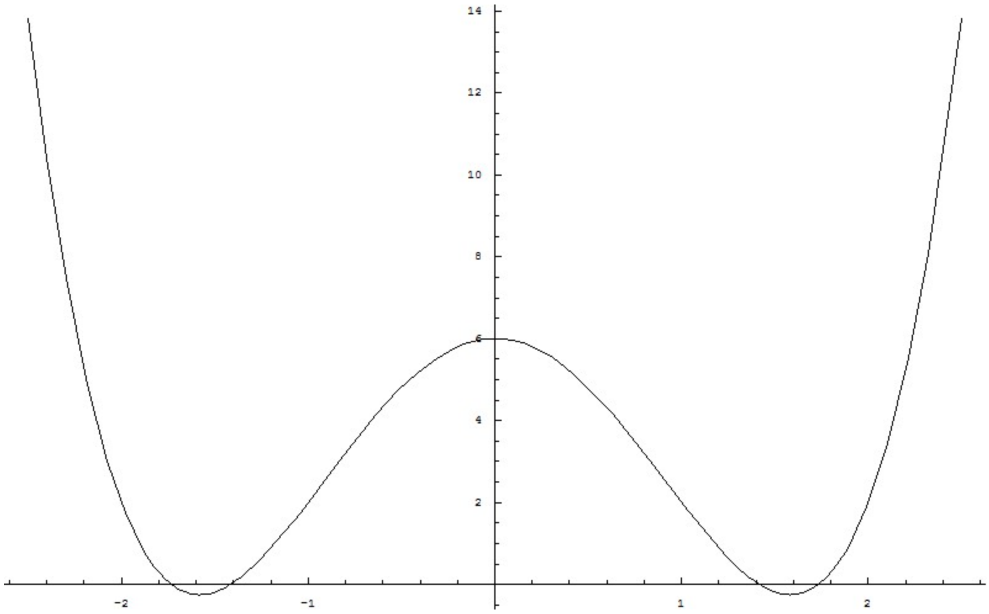
3.(20p) Ile rozwiązań ma równanie:
a) $e^{3x} = 3x$?
b) $e^{3x} = 3x + 1$?
c) $e^{3x} = 3x + 3$?

Rozwiązanie:
badamy $f(x) = e^{3x} - 3x$. Pochodna $f'(x) = 3e^{3x} - 3 = 3(e^{3x} - 1)$. Dla $x < 0$ mamy $f'(x) < 0$, a dla $x > 0$ mamy $f'(0) > 0$. Czyli na $(-\infty, 0]$ f maleje, na $[0, \infty)$ rośnie, w 0 ma minimum, $f(0) = 1$. Stąd:
a) $f(x) = 0$ nie ma rozwiązań,
b) $f(x) = 1$ ma jedno rozwiązanie (minimum),
c) $f(x) = 3$ ma 2 rozwiazania (po jednym na każdej półprostej, co wynika z tw. Darboux zastosowanego do naszej ciągłej i monotonicznej na tych półprostych funkcji).

4.(20p) Zbadać funkcję (zera, przedziały monotoniczności, przedziały wypukłości, ekstrema lokalne, granice w końcach dziedziny). Naszkicować wykres. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6\,.$

Rozwiązanie: $f(x) = (x^2-2)(x^2-3) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.
Zera: $x = \pm\sqrt{2}\,,\ \pm\sqrt{3}$;
granice w $\pm\infty$ są równa $+\infty$;
$f'(x) = 4x^3 - 10x = 4x(x-\sqrt{5/2})(x+\sqrt{5/2})$; zeruje się dla $x = 0\,,\ \pm\sqrt{5/2}$;
f' dodatnia na przedziale $(-\sqrt{5/2}, 0)$ i na przedziale $(\sqrt{5/2}, +\infty)$, ujemna na $(-\infty, -\sqrt{5/2})$ i na $(0, \sqrt{5/2})$;
Zatem f rośnie na przedziale $[-\sqrt{5/2}, 0]$ i na przedziale $[\sqrt{5/2}, +\infty)$, maleje na $(-\infty, -\sqrt{5/2}]$ i na $[0, \sqrt{5/2}]$;
Lokalne mimima: $f(\pm\sqrt{5/2}) = -1/4$, lokalne maksimum $f(0) = 6$.
$f''(x) = 12x^2 - 10$; zeruje się dla $x = \pm\sqrt{5/6}$;
f'' dodatnia na $(-\infty, -\sqrt{5/6})$ i na $(\sqrt{5/6}, +\infty)$, ujemna na $(-\sqrt{5/6}, \sqrt{5/6})$;
f wypukła na $(-\infty, -\sqrt{5/6}]$ i na $[\sqrt{5/6}, +\infty)$, wklęsła na $[-\sqrt{5/6}, \sqrt{5/6}]$;

Rysunek



5.(20p) Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = e^{3x}(|x|-4)$ na odcinku domkniętym $[-6, 6]$.

Rozwiązanie:
1) wartości w końcach: $f(-6) = \mathbf{2e^{-18}}$, $f(6) = \mathbf{2e^{18}}$
2) wartość w punkcie, w którym nie istnieje pochodna (w $x = 0$): $\mathbf{-4}$
3) na przedziale $(-6, 0)$: $f(x) = e^{3x}(-x-4)$, $f'(x) = e^{3x}(-3x-13)$;
ekstremum gdy $x = -13/3$, $f(-13/3) = \mathbf{e^{-13}/3}$
4) na przedziale $(0, 6)$: $f(x) = e^{3x}(x-4)$, $f'(x) = e^{3x}(3x-11)$.
ekstremum gdy $x = 11/3$, $f(11/3) = \mathbf{-e^{11}/3}$

Z powyższych obliczeń wynika, że jedynymi punktami, w których funkcja może mieć ekstrema lokalne są $\pm 6, 0, -13/3, 11/3$, tymczasem tw. Weierstrassa gwarantuje, że funkcja ciągła na przedziale domkniętym musi przyjąć swoją wartość największą i najmniejszą, które automatycznie są ekstremami lokalnymi. Zatem z porównania wartości funkcji w tych punktach wnioskujemy, że $\max(f) = f(6) = 2e^{18}$, $\min(f) = f(11/3) = -e^{11}/3$

6.(15p) Znaleźć granicę $\lim_{x\to 0} \frac{x(e^{5x}-1)}{\sin(8x^2)}$.

Rozwiązanie: $\cdots = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{5x}-1)/5x}{\sin(8x^2)/8x^2} \frac{5}{8} = \frac{\lim_{x\to 0}(e^{5x}-1)/5x}{\lim_{x\to 0}\sin(8x^2)/8x^2} \frac{5}{8} = \frac{5}{8}$