Egzamin **TEMAT A**

Odpowiedzi na pytania z ♠ należy uzasadniać

PODAJĘ ODPOWIEDZI BEZ UZASADNIEŃ

♠1) Ciąg punktów $\{x_n\}$ spełnia następujący warunek:
$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n > n_0\ \ |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$
tzn. dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że dla $n > n_0$ zachodzi nierówność $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$
Czy ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny? Jeśli nie zawsze, to podać przykład niezbieżnego ciągu ciągu spełniającego ten warunek.
NIE, NP. $x_n = \sqrt{n}$

Obliczyć granice lub stwierdzić, że nie istnieją:

---

2) $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n!} - \sqrt{\ln(1+n)})$
$+\infty$

---

3) $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{2n})^n$
$\sqrt{e}$

♠4) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(2x^7)\ln(1+x^3)}{x^6\sin(x^5)}$
ROZBIEŻNY (granice jednostronne istnieją, są różne i równe $\pm\infty$)

---

5) Podać przykład lub stwierdzić, że nie istnieje funkcja różniczkowalna spełniająca warunek: $f(1) = 2$, $f(3) = 4$ i $f'(x) < 1$ dla wszystkich punktów x z odcinaka $(1, 3)$.
NIE ISTNIEJE

♠6) Sformułować twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej
JEŚLI $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ JEST CIĄGŁA I RÓŻNICZKOWALNA WEWNĄTRZ PRZEDZIAŁU, TO ISTNIEJE $c \in (a, b)$ TAKI, ŻE $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

---

7) Znaleźć rozwinięcie Taylora funkcji $\cos(2x)$ aż do wyrazu $a_{10}x^{10}$.
$1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \frac{2^6}{6!}x^6 + \frac{2^8}{8!}x^8 - \frac{2^{10}}{10!}x^{10}$

♠8) Znaleźć $f^{(40)}(0)$ (tzn. czterdziestą pochodną w zerze) funkcji $f(x) = \cos(2x^4)$.
$\frac{(40)!\,2^{10}}{10!}$

---

9) Dla $f(x, y) = y^2\, 3^{\operatorname{arctg}(x+\ln(x^2+1))}$ obliczyć pochoną kierunkową w punkcie $(0, 3)$ w kierunku wektora $(0, 1)$.
6

---

10) Dana jest funkcja różniczkowalna $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. W pewnym punkcie $\operatorname{grad}(f) = 0$ oraz $D^2 f = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Czy w tym punkcie może być lokalne ekstremum?
TAK

♠11) Dla jakiej liczby naturalnej $n > 0$ funkcja $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + 2y^2 + z^n$ ma ekstremum lokalne w punkcie $(0, 0, 0)$?
DLA WSZYSTKICH n PARZYSTYCH

---

12) Ile jest funkcji ciągłych $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniających warunki: $y(0) = 0$ oraz $x^2 - y(x)^2 = 0$?
4

♠13) Czy zbiór $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4\,,\, 10 - (x^2 + y^2 + z^2) \leq 0\,\}$ jest zwarty ?
NIE

♠14) Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int x^3\, e^{2x^2}\, dx$
$\frac{1}{8}(2x^2 - 1)e^{2x^2} + C$

♠15) Czy pole figury $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,:\, x \geq 2\,,\ y \geq 0,\ x^3 y \leq 5\}$ jest skończone? Jeśli jest skończone, to je obliczyć.
SKOŃCZONE $= \int_2^\infty \frac{5}{x^3}\, dx = \frac{5}{8}$