Plan wykładu nr 11: Ekstrema warunkowe c.d., funkcje uwikłane

Szczegóły:

M. Krych: *skrypt - Ekstrema związane (warunkowe), mnoniki Lagrange'a*

Krysicki-Włodarski: **Tom II**, roz.II (jest tam tylko o funkcjach uwikłanych)

- Warunek konieczny dla istnienia ekstremum funkcji f na zbiorze opisanym równaniami

$$g_1 = 0\,, \;\; g_2 = 0\,, \;\; \ldots\,, \;\; g_k = 0$$

  ◇ układ wektorów $grad(f), grad(g_1), grad(g_2), \ldots, grad(g_k)$ jest liniowo zależny

- przykład $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2$, $g(x, y, z) = x^2 z + y^2 z + z^2$
- Dla dwóch zmiennych i jednego równania otrzymujemy warunek

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$$

- Twierdzenie o ekstremach warunkowych wyrażone za pomocą funkcji Lagrange'a

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) =$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- Przykład szukania ekstremum na zbiorze określonym przez układ równań i nierówności

  ◇ zbiór: $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 = 2z,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 8\}$
  funkcja: $f(x, y, z) = x + y + z$,

- Twierdzenie o funkcji uwikłanej, przypadek $f : \mathbf{R}^{m+1} \to \mathbf{R}$

  ◇ gdy $f(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) = 0$, to $\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}$

  ◇ przykład $f(x_1, x_2, x_3, y) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + y - y^3$, $x = (1, 1, 2)$, $y = 2$

- Przykłady, funkcji dla których $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

  ◇ funkcja uwikłana może nie istnieć:
  $f(x, y) = 1$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$

  ◇ funkcja uwikłana może być niejednoznaczna:
  $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$

- Twierdzenie o funkcji uwikłanej, przypadek $f : \mathbf{R}^{m+r} \to \mathbf{R}^r$

  ◇ wzór na pochodną należy rozumieć macierzowo.

- *Ćwiczenia: zad.6 kartka XXII, zad.2.41-2.56 z Krysickiego-Włodarskiego*