1 Rozmaitości 1-wymiarowe

Zadanie 1.1 Podać klasyfikację topologiczną spójnych podzbiorów prostej i okręgu.

Zadanie 1.2 Niech M będzie spójną rozmaitością jednowymiarową oraz $M = U_1 \cup U_2$, gdzie oba właściwe podzbiory otwarte $U_i \subset M$ są homeomorficzne z $\mathbb{R}$. Pokazać, że:
a) jeżeli $U_1 \cap U_2$ jest zbiorem spójnym, to M jest homeomorficzna z $\mathbb{R}$;
b) jeżeli $U_1 \cap U_2$ ma dwie składowe, to M jest homeomorficzna z okręgiem S^1;
c) jeżeli M jest spójną rozmaitością jednowymiarową, to $U_1 \cap U_2$ ma jedną lub dwie składowe.

Zadanie 1.3 Pokazać, że jeżeli $M = \bigcup U_i$, gdzie $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ oraz wszystkie zbiory są homeomorficzne z $\mathbb{R}$, to M jest homeomorficzna z $\mathbb{R}$.

2 Powierzchnie

Zadanie 2.1 W $4n$-kącie utożsamiamy krawędzie według wzoru

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

Wykazać, że otrzymamy w ten sposób sumę spójną n torusów t.j. sferę z n uszami.

Zadanie 2.2 W $2n$-kącie utożsamiamy krawędzie według wzoru

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_n a_n$$

Wykazać, że otrzymamy w ten sposób sumę spójną n płaszczyzn rzutowych t.j. sferę z n wklejonymi wtęgami Möbusa.

Zadanie 2.3 Zaleźć warunek na to by robiąc utożsamienia w wielokącie według wzoru $a_{i(1)}^{\pm 1} a_{i(2)}^{\pm 1} a_{i(3)}^{\pm 1} \ldots$ otrzymać powierzchnię? Co otrzymamy ze słów:
a) $ab^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}$,
b) $abcdec^{-1}da^{-1}b^{-1}e^{-1}$
c) $a_1 a_2 \ldots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_{n-1}^{-1} a_n$
d) $a_1 a_2 \ldots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_{n-1}^{-1} a_n^{-1}$

Zadanie 2.4 Niech K będzie butelką Kleina K. Wykazać, że $K = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$

Zadanie 2.5 Niech $T^2 = S^1 \times S^1$ będzie torusem. Wykazać, że $K \# \mathbb{RP}^2 = T^2 \# \mathbb{RP}^2$.

Zadanie 2.6 Niech $P = P(g, m, d)$ będzie sferą z g uszami, m wklejonymi wstęgami Möbusa i usunietymi d otwartymi dyskami. Modyfikujemy P w następujący sposób: znajdujemy włożenie

$$f : \{0,1\} \times [0,1] \to \partial P$$

i definiujemy

$$P' = P \cup_f [0,1] \times [0,1] \,,$$

t.j przyklejamy *rączkę*. Pokazać, że w ten sposób otrzymamy powierzchnie homeomorficzną z $P(g', m', d')$ dla pewnych g', m', d'.

Zadanie 2.7 Wykazać, że każda triangulowalna powierzchnia zamknięta jest homeomorficzna z sumą spójną torusów lub sumą spójną płaszczyzn rzutowych.
Uwaga: Każda powierzchnia jest triangulowalna.

Zadanie 2.8 Niech $P_1 \to P_2$ będzie nakryciem powierzchni. Znając P_2 powiedzieć jaka może być P_1

Zadanie 2.9 Które powierzchnie zanurzają się w $\mathbb{R}^3$. Które dopuszczją immersję w $\mathbb{R}^3$.

3 Sklejanie rozmaitości

Zadanie 3.1 Sklejamy dwa pełne torusy wzdłuż brzegu za pomocą homeomorfizmu

$$\phi : T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T^2$$

zadanego przez macierz z $SL(2, \mathbb{Z})$. Obliczyć grupę podstawową otrzymanej rozmaitośi.

Zadanie 3.2 Pokazać, że sfera S^{n-1} jest homeomorficzna ze sklejeniem $(S^r \times D^{n-r}) \cup_h (D^{r+1} \times S^{n-r-1})$ wzdłuż wspólnego brzegu $S^r \times S^{n-r-1}$.

Chirurgie rozmaitości (modyfikacje sferyczne)

Definicja Niech $f : S^r \longrightarrow M$ będzie zanurzeniem homeomorficznym sfery rozszerzającym się do zanurzenia $f : S^r \times D_\epsilon^{n-r} \longrightarrow M$, gdzie D_ϵ^k jest k-wymiarową kulą domkniętą w $\mathbb{R}^k$ o promieniu $1+\epsilon$, $\epsilon > 0$. Zbudujemy rozmaitość M_f w następujący sposób:
1. Usuńmy z rozmaitości M podzbiór otwarty $f(S^r \times D^{n-r})$,
2. Brzeg rozmaitości $M' := M \setminus f(S^r \times D^{n-r})$ jest homeomorficzny (poprzez f) z $\partial(S^r \times D^{n-r}) = S^r \times S^{n-r-1} = \partial(D^{r+1} \times S^{n-r-1})$,
3. $M_f := (D^{r+1} \times S^{n-r-1}) \cup_f M'$. Mówimy, że M_f powstała w wyniku chirurgii (modyfikacji sferycznej) rozmaitości M wzdłuż f.

Uwaga. Chirurgii można dokonywać również na rozmaitości z brzegiem zakładając, że obraz f jest zawarty we wnętrzu rozmaitości M.

ZADANIE 3.3 Sprawdzić, że M_f istotnie jest rozmaitością. Zakładając, że M jest orientowalna zbadać orientowalność M_f.

ZADANIE 3.4 Skonstruować kanoniczny bordyzm W_f między M_f a M (zwany śladem modyfikacji wzdłuż f), który jest homotopijnie równoważny z $M \cup_f D^{r+1}$. Zbadać orientowalność śladu.

ZADANIE 3.5 Jak zachowuje się grupa podstawowa przy modyfikacjach wzdłuż sfery 0-wymiarowej i 1-wymiarowej gdy wymiar rozmaitości jest większy niż 3?

ZADANIE 3.6 Dla dowolnej grupy skończenie prezentowalnej G skonstruować zamkniętą orientowalną rozmaitość 4-wymiarową M taką, że $\pi_1(M) \simeq G$.

Wsk: Skonstruować rozmaitość M^4, której grupa podstawowa jest grupą wolną. Następnie skorzystać z zad. i faktu, że dowolne przekształcenie $f\colon S^1 \longrightarrow M^4$ jest homotopijne z gładkim zanurzeniem. Jeśli rozmaitość M^4 jest orientowalna, to wiązka normalna do tego zanurzenia jest trywialna.

4 Orientacja rozmaitości

ZADANIE 4.1 Niech M będzie rozmaitością wymiaru n, a TM jej wiązką styczną. Wykazać, że wiązka sfer wiązki liniowej $\Lambda^n TM$ jest rozmaitością orientowalną.

ZADANIE 4.2 Rozmaitość M jest orientowalna wtedy i tylko wtedy gdy jest orientowalna po wyjęciu z niej dowolnej domkniętej podrozmaitości kowymiaru ≥ 2

5 Rozmaitości 3-wymiarowe

ZADANIE 5.1 Niech M_i dla $i = 1, 2$ będą pełnymi torusami (t.j. $D^2 \times S^1$). Znaleźć homeomorfizmy ich brzegów takich, żeby w wyniku sklejenia otrzymać sferę S^3, $S^2 \times S^1$, przestrzenie soczewkowe. Znaleźć odwzorowania indukowane na $\pi_1(\partial M_1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

ZADANIE 5.2 Wkazać, że każda orientowalna 3-wymiarowa rozmaitość lest sumą dwu pełnych precli sklejonych wzdłuż brzegu (rozkład Heegaarda).

ZADANIE 5.3 Jeśli M^3 jest rozmaitością zamkniętą 3-wymiarową o skończonej grupie podstawowej to M^3 jest orientowalna.

ZADANIE 5.4 Grupa podstawowa 3-wymiarowej rozmaitości zamkniętej nie zawiera podgrupy postaci $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

Uwaga. Jeżeli każda podgrupa rzędu p^2 skończonej p-grupy G jest cykliczna to G jest cykliczna lub (dla $p = 2$) uogólniona kwaternionowa).

Twierdzenie (J.Milnor) Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowolna podgrupa rzędu $2p$ grupy podstawowej 3-wymiarowej rozmaitości zamkniętej jest cykliczna.

6 Inne zadania

ZADANIE 6.1 Niech $L = \{z \in S^{2n-1}, | \, f(z) = 0\} \subset \mathbb{C}^n$, gdzie f jest jednorodnym wielomianem, a S^{2n-1} sferą o środku w 0. Załóżmy, że f ma punkt krytyczny tylko w 0. Wykazać, że L jest brzegiem.

(Uwaga: Założenie o jednorodności f można odrzucić.)

ZADANIE 6.2 Oznaczmy $\chi_2(X) := \chi(X) \, mod \, 2 \in \mathbb{Z}_2$, gdzie $\chi(X)$ oznacza charakterystykę Eulera. Jeśli rozmaitość zamknięta M ogranicza to $\chi_2(M) = 0$. Uwaga: Przystawania $mod\, 2$ nie można zastąpić równością nawet dla rozmaitości zorientowanych.

ZADANIE 6.3 Niech $(M, \partial M)$ będzie rozmaitością z brzegiem taką, że włożenie $\partial M \subset M$ jest ściągalne. Wtedy

a) rozmaitość M jest ściągalna,

b) jeśli ∂M jest jednospójna, to M jest homeomorficzna z dyskiem,

c) Skonstruować przykład $(M, \partial M)$ taki, że $\partial M \subset M$ jest ściągalna, a M nie jest homeomorficzna z dyskiem.

7 Zadania specjalne

Dla znawców kohomologii.

ZADANIE 7.1 Obliczyć pierścienie kohomologii powierzchni.

ZADANIE 7.2 (Zadanie dodatkowe) Wykazać, że $\mathbb{CP}^{2n} \# \mathbb{CP}^{2n}$ nie jest homeomorficzne z $\mathbb{CP}^{2n} \# -\mathbb{CP}^{2n}$, gdzie $-\mathbb{CP}^{2n}$ oznacza $\mathbb{CP}^{2n}$ z odwróconą orientacją.

Zadania geometryczne

ZADANIE 7.3 W zespolonej płaszczyźnie rzutowej równanie stopnia d opisuje krzywą algebraiczną C. Przy założeniu że C jest nieosobliwa obliczyć jej genus.

ZADANIE 7.4 Pokazać, że każda rzeczywista orientowalna powierzchnia jest dyfeomorficzna z pewną krzywą algebraiczną w $\mathbb{CP}^3$.

Wsk: Powierzchnię zanurzyć w $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$.

Zadanie 7.5 Pokazać, że nie każda rzeczywista orientowalna powierzchnia zamknięta jest zupełnym przecięciem w $\mathbb{CP}^3$ (tzn. nie jest przecięciem dwu zespolonych hiperpowierzchni).

Wsk: $\chi(C) = \langle c_1(TC), [C]\rangle = -deg\, K_C$.

Rozdmuchaniem dysku $\mathbb{D}^{2n} \subset \mathbb{C}^n$ w punkcie 0 nazywa się podzbiór $X \subset D^{2n} \times \mathbb{C}P(n-1)$ opisany układem równan: $\{x_i y_j = x_i y_i | i, j = 1, ..., n\}$. Zauważyć, że: projekcja $\pi_1 : X \to D^{2n}$ jest lokalnym dyfeomorfizmem poza $\pi^{-1}(0)$, natomiast $\pi^{-1}(0) = \mathbb{C}P(n-1)$.

Zadanie 7.6 Wykazać, że X jest homeomorficzna z $D^{2n} \# - \mathbb{CP}(n)$.

Zadanie 7.7 Korzystając z twierdzenia o otoczeniu normalnym podrozmaitości zdefiniować rozdmuchanie rozmaitości wzdłuż podrozmaitości zamkniętej $N \subset M$. (Dla znawców: obliczyć homologie.)

8 Uogólnione kohomologie

Uogólniona teoria kohomologii to jest funktor kontrawariantny:

$$\{Pary\ przestrzeni\ topologicznych\} \longrightarrow \{Grupy\ abelowe\ z\ gradacją\}$$

$$A \subset B \longmapsto h^*(B, A)$$

spełniający

1. Dla każdego otwartego zbioru U takiego, że $\overline{U} \subset int\, A$ włożenie indukuje izomorfizm
$$h^*(B, A) \longrightarrow h^*(B \setminus U, A \setminus U)\,,$$
2. Dla trójki podprzestrzeni $A \subset B \subset C$ istnieje naturalne przekształcenie δ, takie, że natępujący ciąg jest dokładny:
$$\longrightarrow h^{*-1}(B, A) \xrightarrow{\delta} h^*(C, B) \longrightarrow h^*(C, A) \longrightarrow h^*(B, A) \longrightarrow\ ,$$
3. Dwa przekształcenia homotopijne indukują to samo na kohomologiach.

Grupę z gradacją $h^* = h^*(pt, \emptyset)$ nazywamy współczynnikami teorii $h^*(-,-)$. Piszemy $h^*(X)$ dla oznaczenia $h^*(X, \emptyset)$.

Zadanie 8.1 Wykazać, że:

1. $h^*(X) \simeq h^*(X, pt) \oplus h^*$;
2. $h^*(X \times I, A \times I \cup X \times \partial I) \simeq h^{*-1}(X, A)$, gdzie I jest odcinkiem $[0, 1]$;

3. $h^*(X \vee Y, pt) \simeq h^*(X, pt) \oplus h^*(Y, pt)$, gdzie $X \vee Y = X \sqcup_{pt} Y$ powstaje z X i Y przez sklejenie wzdłuż jednego punktu.

Zadanie 8.2 Obliczyć $h^*(S^n)$.

Zadanie 8.3 Jakie odwzorowanie na kohomologiach indukuje ściągnięcie równka w sfrze $\alpha : S^n \longrightarrow S^n \vee S^n$.

Zadanie 8.4 Obliczyc kohomologie orientowalnej powierzchni bez brzegu.

Zadanie 8.5 Założmy, że mnożenie przez 2 w h^* jest suriektywne. Obliczyc kohomologie nieorientiwalnej powierzchni bez brzegu.

9 Wiązki wektorowe i pokrewne

Zadanie 9.1 Wykazać, że wiązka styczna do grupy Lie jest trywialna (np. S^1, S^3 a nawet S^7, choć działanie nie jest łączne.)

Zadanie 9.2 Znaleźć funkcję sklejającą dla wiązki Hopfa (tautologicznej) nad $\mathbb{CP}^1$, nazywanej też $\mathcal{O}(-1)$.

Zadanie 9.3 Znaleźć funkcję sklejającą dla wiązki stycznej do sfery (przynajmniej dla $n = 2$).

Zadanie 9.4 Zidentyfikować przestrzeń Thoma wiązki $H^* = \mathcal{O}(1)$ – sprężonej do tautologicznej nad przestrzenią rzutową.

Zadanie 9.5 Niech $E_i \longrightarrow B_i$ dla $i = 1, 2$ będą wiązkami wektorowymi. Wykazać, że przestrzeń Thoma wiązki $p_1 \times p_2 \colon E_1 \times E_2 \longrightarrow B_1 \times B_2$ jest homeomorficzna z $T(E_1) \wedge T(E_2)$. Wywnioskować stąd, że $T(E \oplus \theta^k) = \Sigma^k T(E)$.

Zadanie 9.6 Wykazać, że wiązka sfer jedynej nietrywialnej rzeczywistej wiązki wektorowej wymiaru 3 nad S^2 jest homemorficzna z $\mathbb{C}P(2) \# - \mathbb{C}P(2)$ (a więc $\mathbb{C}P(2) \# - \mathbb{C}P(2)$ jest brzegiem wiązki dysków.)

10 Przestrzenie jednorodne grup liniowych.

Zadanie 10.1 Wykazać, że każda spójna grupa Liego jest brzegiem. Czego brzegiem jest $\mathbb{RP}^3 = SO(3)$?

Wsk: Zwarta grupa Liego zawiera podgrupę izomorficzną z S^1.

Zadanie 10.2 Znaleźć zanurzenie rozmaitości Grassmanna w przestrzeń afiniczną oraz w przestrzeń rzutową (niższego wymiaru).

Zadanie 10.3 Niech V będzie n-wymiarową przestrzenia wektorową nad $\mathbb{R}$ lub nad $\mathbb{C}$. Przestrzenią flag nazywamy przestrzeń, której punktami są ciągi podprzestrzeni $V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_n$, takie, że $dim(V_i) = 1$. Wykazać, że przestrzeń flag jest zwartą i spójną rozmaitością. Znaleźć jej wymiar.

11 Wiązki II

ZADANIE 11.1 Definiujemy podzbiór w grassmanianie $G(n, N)$ podprzestrzeni n-wymiarowych w $\mathbb{K}^N$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$):

$$A_k = \{V \subset \mathbb{K}^N : \dim V = n\,,\ \dim(V \cap \mathbb{K}^{N-k} < n - k)\}\,.$$

($\mathbb{K}^{N-k}$ traktujemy jako podzbiór $\mathbb{K}^N$ opisany równaniami $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$.) Wykazać, że wiązka tautologiczna nad $G(n, N) \setminus A_k$ ma k przekrojów liniowo niezależnych. Obliczyć kowymiar A_k.

ZADANIE 11.2 Jeśli $p : E \longrightarrow X$ jest k-wymiarowa wiązką rzeczywistą nad n-wymiarowym CW-kompleksem, to p posiada $k-n$ przekrojów liniowo niezależnych w każdym punkcie.

ZADANIE 11.3 Jeśli L jest wiązką rzeczywistą jednowymiarową, to $L \otimes L \simeq 1$. Jeśli L jest wiązką zespoloną jednowymiarową, to $L \otimes L^* \simeq 1$, gdzie L^* oznacza wiązkę sprzężoną do L. Zbiór klas izomorfizmu wiązek liniowych $Vect_1(X)$ jest grupą ze względu na iloczyn tensorowy.

ZADANIE 11.4 Zdefiniować odwzorowanie $\mu : \mathbb{CP}(\infty) \times \mathbb{CP}(\infty) \longrightarrow \mathbb{CP}(\infty)$ takie, aby $\mu^* H \simeq H \boxtimes H = p_1^* H \otimes p_2^* H$, gdzie $H = \mathcal{O}(-1)$ oznacza wiązkę tautologiczną, a p_i są rzutami.

ZADANIE 11.5 Niech M będzie gładka rozmaitością. Wykazać, że przekątna w $M \times M$ ma otoczenie homeomorficzne z otoczeniem przekroju zerowego w wiązce stycznej do M.

ZADANIE 11.6 Wiazka tautologiczna H nad $\mathbb{CP}^n$ jest podwiązką $n+1$-wymiarowej wiązki trywialnej. Jaka jest wiązka ilorazowa? (Wsk: $T\mathbb{CP}^n \otimes H$.)

ZADANIE 11.7 Zauważyć izomorfizm wiązek rzeczywistych: $TS^n \oplus \theta^1 \simeq \theta^{n+1}$. Czy zachodzi on także dla $n = 2$, gdy rozpatrujemy wiązki zespolone?

ZADANIE 11.8 Opisać półpierścień wiązek rzeczywistych nad S^1 i wiązek zespolonych nad S^2.

ZADANIE 11.9 Niech $E \longrightarrow X$ będzie n-wymiarową rzeczywista wiązką wektorową. Wykazać, że następujące konstrukcje przestrzeni Thoma, oznaczanej $Th(E)$, są naturalnie homeomorficzne:

- $\mathbb{P}(E \oplus 1)/\mathbb{P}(E)$, gdzie $\mathbb{P}(-)$ oznacza funktor projektywizacji;
- $D(E)/S(E)$, gdzie $S(E) \subset D(E) \subset E$ oznacza odpowiednio wiązkę sfer i wiązkę dysków w pewnej metryce na E;
- Jeśli X jest przestrzenią zwartą, $E^+ := E \cup \{\infty\}$, jednopunktowe uzwarcenie przestrzeni E.

Uwaga Dla wiązki zerowymiarowej nad X definiujemy przestrzeń Thoma jako $X \coprod \{\infty\}$, która także będziemy oznaczać X^+.

12 Izomorfizm Thoma itp.

ZADANIE 12.1 Udowodnić dokładność ciągu Mayera-Vietorisa w teorii bordyzmów $N_*(-)$.

ZADANIE 12.2 Niech $E \to X$ będzie n-wymiarową wiązką wektorową. Operacja transwersalnego przecięcia z przekrojem zerowym indukuje przekształcenie $T : N_*(Th(E)) \to \tilde{N}_{*-n}(X)$. Korzystając z ciągu Mayera-Vietorisa udowodnić, że T jest izomorfizmem.

ZADANIE 12.3 Geometrycznie znaleźć przekształcenie odwrotne do T na poziomie odwzorowań $M \to X$. Przeprowadzić geometrycznie dowód izomorfizmu.

ZADANIE 12.4 Rozważamy zbiór klas odwzorowań z rozmaitości z brzegiem do X takich, że obraz brzegu jest zawarty w A. Wprowadzamy oczywistą relację bordyzmu. Klasy równoważności oznaczamy $N_*(X; A)$. Pokazać, że $N_*(X, A) \simeq \tilde{N}_*(X/A)$

ZADANIE 12.5 Wykazać, że jeśli wiązka styczna do zwartej rozmaitości M jest stabilnie trywialna, to M jest dyfeomorficzna z $f^{-1}(pt)$ dla pewnego odwzorowania sfer $f : S^k \to S^n$.

13 Kobordyzmy

Niech A będzie rozmaitością. Definiujemy grupę kobordyzmów relatywnych $N^*(A, B)$. Jest to zbiór klas odwzorowań własciwych $f : M \to A$, gdzie M jest rozmaitością (być może nie zwartą) oraz obraz $f(M) \subset A \setminus B$. Analogicznie definiujemy relację kobordyzmu. Gradacja jest zadana wirtualnym kowymiarem: $* = \dim A - \dim M$.

ZADANIE 13.1 Niech $x \in A$. Udowodnić, że $N^*(A, \{x\}) \simeq \tilde{N}^*(A)$. Geometrycznie zdefiniować rozkład $N^*(A) = N^*(A, \{x\}) \oplus N^*(\{x\})$.

ZADANIE 13.2 Dualność Poincarégo: Niech X będzie rozmaitością zwartą. Niech $A \subset X$ będzie otwartym podzbiorem takim, że ∂A jest hiperpowierzchnią. Udowodnić, że $N^*(A, B) \simeq N_{\dim X - *}(X \setminus B, X \setminus A)$.

ZADANIE 13.3 Niech X będzie zwartą rozmaitością z brzegiem. Wykazać ,że $N^*(X) \simeq N_{\dim X - *}(X, \partial X)$ oraz $N^*(X, \partial X) \simeq N_{\dim X - *}(X)$.

ZADANIE 13.4 Opisać różniczkę w ciągu Mayera-Vietorisa dla $N^*(-)$.

Zadanie 13.5 Niech X będzie zwartą rozmaitością wymiaru n, a $p : E \to X$ rzeczywistą wiązką wektorową rangi r. Sparwdzić, że następujące diagramy są przemienne:

$$\begin{tikzcd} N^*(DE, SE) \arrow[r, "\text{Poincare}"] & N_{n+r-*}(DE) \\ N^{*-r}(X) \arrow[u, "\text{Thom}"] \arrow[r, "\text{Poincare}"] & N_{n+r-*}(X)\,, \arrow[u, "i_*"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} N^*(DE) \arrow[d, "i^*"'] \arrow[r, "\text{Poincare}"] & N_{n+r-*}(DE, SE) \arrow[d, "\text{Thom}"] \\ N^*(X) \arrow[r, "\text{Poincare}"] & N_{n-*}(X)\,, \end{tikzcd}$$

gdzie DE jest wiązką dysków, SE jest wiązką sfer, a $i : X \to E$ jest włożeniem jako przekrój zerowy. Narysować analogiczne diagramy gdy X jest rozmaitością z brzegiem.

Zadanie 13.6 Sprawdzić, że izomorfizmy Thoma $T : \tilde{N}_*(Th(E)) \to N_{*-r}(X)$ oraz $T : N^*(X) \to \tilde{N}^{*+r}(Th(E))$ są transferami dla włożenia X w E jako przekrój zerowy.

Zadanie 13.7 Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem gładkich rozmaitości. Sprawdzić, że transfery można wyrazic wzorami: $f^! = D \circ f^* \circ D^{-1}$ (transfer homologiczny) $f_! = D^{-1} \circ f_* \circ D$ (transfer kohomologiczny), gdzie $D : N^*(X) \xrightarrow{\simeq} N_{\dim X - *}(X)$ jest dualnością Poincaré. Czy te wzory obowiązują dla rozmaitości z brzegiem?

Zadanie 13.8 Udowodnić, że singularna teoria (ko)homologi $H^*(-)$ i $H_*(-)$ dopuszcza transfer dla gładkich odwzorowań właściwych.

14 Grupy formalne

Zadanie 14.1 Niech $f(x) = x + ax^2 + bx^3 + \ldots \in R[[x]]$ będzie szeregiem formalnym nad dowolnym pierścieniem R. Jak wyglądają współczynniki grupy formalnej indukowanej z grupy addytywnej: $F(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y))$ (obliczyć współczynniki przy jednomianach stopnia ≤ 3).

Zadanie 14.2 Niech $F(x, y) = x + y + axy \in R[[x, y]]$ (R jest dowolnym pierścieniem, $a \in R$). Czy F jest grupą formalną? Jeśli tak, to podać wzór na formalną odwrotność $\phi(x)$ spełniającą tożsamość $F(x, \phi(x)) = 0$. Czy zawsze F jest indukowana z grupy addytywnej $x + y$, t.zn. czy ma logarytm?

Zadanie 14.3 Endomorfizm grupy formalnej F jest szeregiem formalnym $f(x)$ takim, że $f(F(x, y)) = F(f(x), f(y))$. Opisać pierścień Endomorfizmów grupy addytywnej dla: a) $R = \mathbb{Q}$, b) $R = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Zadanie 14.4 Opisać grupe formalną stowarzyszoną z teorią kohomologii singularnych o współczynnikach w $\mathbb{F}_2$.

Zadanie 14.5 Opisać rozmaitości reprezentujące współczynniki w grupie formalnej stowarzyszonej z teorią kobordyzmów niezorientowanych.

Zadanie 14.6 Niech $J = (x, y) \subset R[[x, y]]$ będzie ideałem generowanym przez x i y. Załóżmy, że R jest algebrą nad $\mathbb{F}_2$, oraz grupa formalna F spełnia warunek $F(x, x) = 0$. Przypuśćmy, że $F(x, y) = x + y + G(x, y) \mod J^{n+1}$, gdzie G jest wielomianem jednorodnym stopnia n. Pokazać, że $G(x, y) = a((x+y)^n - x^n - y^n)$ dla pewnego $a \in R$.

Zadanie 14.7 Niech R będzie algebrą nad $\mathbb{F}_2$. Wykazać, że każda grupa formalna spełniająca warunek $F(x, x) = 0$ jest indukowana z grupy addytywnej. Logarytm jest szeregiem formalnym $f(x) = x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots \in R(x)$ takim, że $a_j = 0$ gdy $j = 2^i - 1$ dla $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Zadanie 14.8 Wykazać, że jeśli R jest algebrą nad cialem charakterystyki zero (n.p. nad $\mathbb{Q}$), to każda grupa formalna jest indukowana z grupy addytywnej.

Wsk: Logarytmem jest $\int_0^x \frac{d\xi}{g(\xi)}$, gdzie $g(x) = (\frac{\partial F(x,y)}{\partial y})_{|y=0}$.

15 Kolejna seria

Zadanie 15.1 Opisać odwrotność izomorfizmu $N^*[x]/(x^{n+1}) \xrightarrow{\simeq} N^*(\mathbb{RP}^n)$

$$x \mapsto e(H) = (\mathbb{RP}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{RP}^n)\,.$$

Odp: Klasa $[M \to \mathbb{RP}^n]$ jest równa $\sum_{i=0}^n M_i x^i = (\sum_{i=0}^n V_i x^i)/P(x)$, gdzie $V_i = p_!(M \cdot e(H)^{n-i})$ oraz p jest odwzorowaniem w punkt. Szereg $P(x)$ jest dany wzorem $P(x) = 1 + [\mathbb{RP}^1]x + [\mathbb{RP}^2]x^2 + \ldots$.

Zadanie 15.2 Niech h^* będzie teorią kohomologii określoną na skończonych CW-kompleksach. Załóżmy, że w h^* istnieje naturalna klasa Eulera. Sprawdzić poprawność definicji grupy formalnej zadanej przez

$$F(x,y) \bmod (x^{n+1}, y^{m+1}) = e(H_n \boxtimes H_m) \in h^*(\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m)\,,$$

gdzie H_n i H_m są wiązkami Hopfa. Korzystamy z utożsamienia $h^*(\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m) \simeq h^*[x,y]/(x^{n+1}, y^{m+1})$.

Zadanie 15.3 Podać jawną postać pierwszych paru współczynników grupy formalnej zdefiniowanej przez klasę Eulera w teorii kobordyzmów.

Wsk: Skorzystać ze wzoru: $F(x,y) = \left(\sum_{i,j\geq 1}[H_{i,j}]x^i y^j\right)/P(x)P(y)$, gdzie $H_{i,j}$ jest rozmaitością Milnora, a szereg $P(x)$ jest zdefiniowany w zadaniu 15.1. Pokazać, że $H_{1,1}$, $H_{1,2}$, $H_{0,4}$, $H_{1,3}$ i $H_{2,2}$ są brzegami.

Uwaga: Każda rozmaitość 3-wymiarowa jest brzegiem.

Zadanie 15.4 Podać jawną postać pierwszych paru współczynników logarytmu powyższej grupy formalnej.

Zadanie 15.5 Niech F będzie grupą formalną. Definiujemy liczbę (wysokość)

$$ht(F) = \min\Big\{n : \underbrace{F(x, F(x, \ldots, x)\ldots)}_{n} = 0\Big\}\,.$$

Wykazać, że jeśli $F \simeq G$ (t.zn. istnieje odwracalny szereg formalny $f(x) = x + \ldots$ taki, że $F(x,y) = f^{-1}(G(f(x), f(y)))$) to $ht(F) = ht(G)$.

Zadanie 15.6 Wykazać, że grupa formalna nad $\mathbb{F}_p$ zadana szeregiem $x+y+xy$ nie ma logarytmu.

Zadanie 15.7 Sprawdzić, że transfer zadany przez klasę Thoma dla $N^*(-)$ jest transferem zdefiniowanym przez złożenie funkcji

$$f_![M \xrightarrow{g} X] = [M \xrightarrow{fg} Y]$$

dla $f : X \to Y$.

16 Grupy formalne II

Zadanie 16.1 Niech R będzie pierścieniem, a $\mathbf{m}$ jego ideałem. Zakładamy, że R jest zupełny w topologi $\mathbf{m}$-adycznej. Dana jest grupa formalna nad R. Dla elementów $a, b \in \mathbf{m}$ definiujemy $a *_F b = F(a,b)$. Upewnić się, że wzór ten ma sens. Wykazać, że $\mathbf{m}_F = (\mathbf{m}, *_F)$ jest grupą przemienną. Opisać tę grupę gdy $F(x,y) = x+y$ oraz gdy $F(x,y) = x+y+xy$.

Zadanie 16.2 Niech R będzie pierścieniem takim jak w 16.1. Dane są grupy formalne F i G nad R oraz ich „homomorfizm", tzn szereg f taki, że $f(F(x,y)) = G(f(x), f(y))$. Wykazać, że f indukuje homomorfizm grup $f_\# : \mathbf{m}_F \to \mathbf{m}_G$.

Zadanie 16.3 Niech R i R' będą pierścieniami takimi, jak w 16.1. Niech $\alpha : R \to R'$ będzie homomorfizmem takim, że $\alpha(\mathbf{m}) \subset \mathbf{m}'$. Niech F i G będą grupami formalnymi, a f ich „homomorfizmem". Wykazać, że α indukuje diagram przemienny grup:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{m}_F & \xrightarrow{f_\#} & \mathbf{m}_G \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ \mathbf{m}'_{\alpha(F)} & \xrightarrow{\alpha(f)_\#} & \mathbf{m}'_{\alpha(G)} \end{array}\,.$$

Zadanie 16.4 Niech Aff_R będzie kategorią dualną do kategorii algebr nad R. Obiekt odpowiadający algebrze A oznaczamy $spec(A)$;

$$\mathrm{Mor}_{Aff_R}(spec(A), spec(B)) := \mathrm{Mor}_{R-alg}(B, A)\,.$$

Rozważyć czy istnieje odpowiedniość pomiędzy

- strukturami grupowymi na $spec(R[[x]])$, a
- grupami formalnymi nad R.

Wsk: Ewentualnie zmodyfikować kategorię Aff_R.

Zadanie 16.5 Niech k będzie ciałem charakterystyki zero. Korzystając z tego, że każda grupa formalna nad pierścieniem, który jest algebrą nad k ma jednoznaczny logarytm opisać uniwersalną grupę formalną, tzn taką algebrę U nad k i grupę formalną F_U nad U, że dla każdej algebry R nad k i każdej grupy formalnej F nad R istnieje homomorfizm $\alpha : U \to R$ taki, że $\alpha(F_U) = F$.

Zadanie 16.6 Niech R będzie dziedziną charakterystyki zero (tzn $n \cdot 1_R \neq 0$ dla $n > 0$). Wykazać, że dla dowolnych grup formalnych F i G przekształcenie

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)_{|x=0} : \mathrm{Mor}(F,G) \to R\,, \qquad f(x) = \textstyle\sum_{i=1}^\infty a_i x^i \mapsto a_1$$

jest monomorfizmem. Podać przykład grupy formalnej takiej, że to przekształcenie nie jest epimorfizmem.

Zadanie 16.7 Zakładamy, że R jest algebrą nad $\mathbb{F}_p$. Wykazać, że każdy logarytm, tzn „izomorfizm" z F do grupy addytywnej można zmodyfikować tak, że współczynniki przy x^{p^k} będą zerowe, a współczynnik przy x się nie zmieni.