

Representation theory of Lie group and algebras

EXAM

Będę na Wydziale w czwartek od 14.30 (może mi się uda dotrzeć na 14.00). Proszę o wiadomości mailem, kto chce zdawać. Jeśli to możliwe proszę przygotować listę (1/2h na osobę). W piątek mam inne egzaminy do g.15. Po 15 mogę przepytac kolejne osoby. Jeśli ktoś chce być egzaminowany w innym terminie, to też jest to możliwe.

Rozwiązania zadań.

1.

Let G be a compact connected Lie group, T its maximal torus, $A \subset G$ an abelian group. Show that if $T \subset A$ then $T = A$.

Niech $g \in A$. Grupa $\langle g, T \rangle$ jest topologicznie generowana przez jeden element h . Ten element jest zawarty w pewnym torusie maksymalnym U . A więc $T \subset \overline{\langle h \rangle} \subset U$. Ale T maksymalny, więc $T = U = \overline{\langle h \rangle} = \langle g, T \rangle \ni g$

2.

a) Show that $GL(n, \mathbb{C})/B^+ \simeq U(n)/T$, where B^+ is the group of upper triangular matrices, and T is the maximal torus in $U(n)$.

b) Generalize this statement for complex reductive groups.

c) The Weyl group acts on $U(n)/T$ from the right $gT \mapsto gwT$ for an element $w \in W = NT/T$. Does the action of W preserve the complex structure of G/B^+ ? (The tangent space at the point gB^+ is isomorphic via translation by g to the complex space $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}^+$.)

a) Ortogonalizacja Grama-Schmidta,

b) B^+ ma algebrę Lie równą $\mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_\alpha$. Dowód równości $G_{\mathbb{C}}/B^+ \simeq G/T$, gdzie $G = (G_{\mathbb{C}})^\Theta$: obie rozmaitości mają równy wymiar, są spójne, naturalne odwzorowanie jest mono (bo $B^+ \cap G = T$), G/T jest zwarta, więc naturalne odwzorowanie jest dyfeomorfizm.

c) Odpowiedź: DZIAŁANIE NIE ZACHOWUJE STRUKTURY ZESPOLONEJ. Niech $w = [g] \in W$, $g \in NT$. Przekształcenie $R_g : G/T \rightarrow G/T$ składamy z $L_{g^{-1}}$, które zachowuje strukturę zespoloną. Badamy działanie sprzęgania przez g działające na $\mathfrak{g}/\mathfrak{t} \simeq \bigoplus_{\alpha < 0} \mathfrak{g}_\alpha$. Zobaczmy co się dzieje dla $G_{\mathbb{C}} = SL_2(\mathbb{C})$, $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Mamy $\mathfrak{g}/\mathfrak{t} \simeq \mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z \\ -\bar{z} & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_{-2} \xrightarrow{g} \mathfrak{g}_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & z \\ -\bar{z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{z} \\ -z & 0 \end{pmatrix}.$$

Zatem działanie jest przez sprzęganie zespolone. Dla większych grup tak samo: działanie pojedynczym odbiciem s_α jest zespolonym sprzężeniem na $\mathfrak{g}_{-\alpha}$.

3.

Show that every compact connected nonabelian Lie group has a nontrivial differential 3-form, which is invariant with respect to automorphisms.

Roz: $\phi(u, v, w) = B([u, v], w)$, gdzie $B(-, -)$ jest formą Killinga.

4.

Let G be a compact group and let V be its complex representation. Show that V admits a nondegenerate invariant symmetric form if and only if V is a complexification of a real representation.

($\Rightarrow$) Dowód elementarny: Dana niezdegenerowana forma 2-liniowa symetryczna ϕ . Zdefiniujemy $s : V \rightarrow V$, które po modyfikacji będzie niezmienniczym sprzężeniem w V . Niech $\langle\langle v, w \rangle\rangle$ będzie niezmienniczym iloczynem hermitowskim. Definiujemy s poprzez formułę $\langle\langle v, s(w) \rangle\rangle = \phi(v, w)$. Sprawdzamy, że

s jest antyliniowe. Z symetrii ϕ dostajemy, że $\langle\langle v, s(w) \rangle\rangle = \overline{\langle\langle s(v), w \rangle\rangle}$. Forma $K(v, w) = \overline{\langle\langle s(v), s(w) \rangle\rangle}$ jest iloczynem hermitowskim. Przestrzeń V rozpada się na ortogonalną sumę prostą podprzestrzeni V_i na których $K(v, w) = \lambda_i \langle\langle v, w \rangle\rangle$, przy czym $\lambda_i \in \mathbb{R}_{>0}$. Niech $s' = s/\sqrt{\lambda_i}$ na V_i . Mamy $\langle\langle v, w \rangle\rangle = \overline{\langle\langle s'(v), s'(w) \rangle\rangle}$, ponadto $(s')^2 = \text{Id}$. Za pomocą s' definiujemy rozbitcie V na część rzeczywistą i urojoną. Wszystko jest G -niezmiennicze.

Rozwiązanie nieelementarne: $V \simeq \mathbb{C}^n$, mamy morfizm $G \rightarrow SO(n, \mathbb{C})$ obraz G jest zwarty, więc z dokładnością do sprzężenia jest zawarty w $SO(n)$, które działa na $\mathbb{R}^n$.

($\Leftarrow$) Jako ϕ bierzemy $\mathbb{C}$ -liniowe rozszerzenie niezmienniczego iloczynu skalarnego.

5.

Let V be a representation of a compact/reductive group, $\alpha \in \Lambda_{root}^*$. Suppose all the weights of V are contained in $\text{conv}(W \cdot \alpha) \cap \Lambda_{root}^*$ (lattice points of the convex hull of the orbit of α with respect to the Weyl group). Moreover suppose that all the multiplicities of weights are equal to one. Does V have to be irreducible?

Opowiedź pozytywna wynika z:

Podlemat: dla każdej wagi $w \in \Lambda^*$ i pierwiastka algebry β podprzestrzeń $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_{w+n\beta}$ jest reprezentacją $\mathfrak{sl}(2)$.

Lemat: w dowolnej reprezentacji U generowanej przez wektor o wadze $\alpha \in \Lambda_{root}^*$ krotności wag z $\text{conv}(W \cdot \alpha) \cap \Lambda_{root}^*$ są niezerowe.

Dowód: Możemy założyć, że α jest w dodatniej komnacie Weyla. Wagi U są postaci $\beta = \alpha -$ (kombinacja nieujemna pierwiastków prostych). Do indukcji ze względu na ilość pierwiastków prostych w zapisie β stosujemy Podlemat.

6.

Find a nontrivial action of $Sp(2)$ (the compact version) on $\mathbb{R}^5$.

Najkrócej: $Sp(2) = Spin(5)$ działa na $\mathbb{R}^5$ poprzez epimorfizm na $SO(5)$.