

Algebry Lie

■ $[-, -] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$

dwuliniowe

antysymetryczne

tożsamość Jacobiego

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Twierdzenie Ado:

Jeśli charakterystyka ciała bazowego jest równa zero, to każda algebra Lie skończonego wymiaru zanurza się w algebrę macierzy.

Klasyczne proste algebry Lie

- A_{n-1} : $\mathfrak{sl}(n) = \{X \in M(n \times n) \mid \text{tr}(X) = 0\}$
- B_n : $\mathfrak{so}(2n+1) = \{X \in M(2n+1 \times 2n+1) \mid X + X^T = 0\}$
- C_n : $\mathfrak{sp}(n) = \{X \in M(2n \times 2n) \mid X^T J + JX = 0\}$,
gdzie $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ jest formą symplektyczną
- D_n : $\mathfrak{so}(2n) = \{X \in M(n \times n) \mid X^T + X = 0\}$
- Nad $\mathbb{R}$ będziemy też wyróżniać:
 $\mathfrak{so}(p, q) = \{X \in M(2n \times 2n) \mid X^T Q + QX = 0\}$,
gdzie Q jest formą symetryczną typu (p, q) .
- Nad $\mathbb{C}$ algebra $\mathfrak{so}(p, q)$ jest izomorficzna z $\mathfrak{so}(p+q)$, ale nie nad ciałem $\mathbb{R}$.

Diagramy Dynkina

■ Proste algebry Lie są opisane przez diagramy Dynkina, które zawierają informacje o pierwiastkach prostych algebry.

■ **Przypomnienie:** Pierwiastki algebry to funkcjonały α z algebry Cartana $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ (maksymalna abelowa, odpowiadająca torusowi maksymalnemu w grupie Lie) takie, że

$$\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{t} \otimes \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{\alpha: \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{R}} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

jest rozkładem reprezentacji dołączonej torusa:

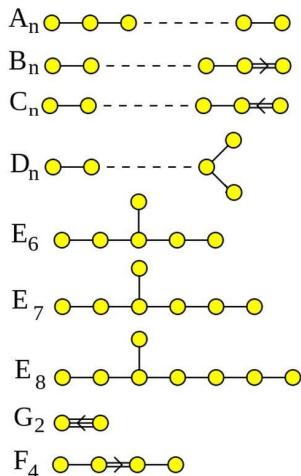
dla $X \in \mathfrak{t}$, $Y \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ mamy $[X, Y] = 2\pi\sqrt{-1}\alpha(X)Y$.

■ Dla serii D_n mamy $\mathfrak{t} \simeq \mathbb{R}^n$, pierwiastki są równe $\pm L_k \pm L_{\ell}$ gdzie $L_k(t_1, t_2, \dots, t_n) = t_k$.

■ Pierwiastki dzielimy na dodatnie i ujemne, ponadto wyróżniamy pierwiastki proste, które są nierozkładalne wśród dodatnich.

Diagramy Dynkina

■ Proste algebry Lie są opisane przez diagramy Dynkina, które zawierają informacje o pierwiastkach prostych algebry.

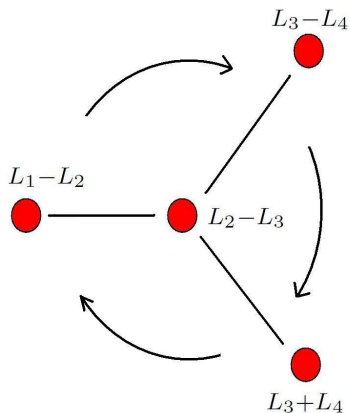


■ Diagram A_n jest symetryczny ze względu na oś pionową. Istnieje automorfizm $\mathfrak{sl}(n+1)$, który indukuje tę symetrię $X \mapsto -X^T$.

■ Diagram D_n jest symetryczny ze względu na oś poziomą. Sprzężenie przez element z $O(2n)$ zadaje odpowiedni automorfizm algebry $\mathfrak{so}(2n)$.

■ Jedynym wyjątkowym automorfizmem diagramu Dynkina jest obrót o 120° diagramu D_4 .

Triality - Tóжноść



■ Wyjątkowy automorfizm algebry $\mathfrak{so}(8)$ był opisany przez Elie Cartana w 1925 r. w pracy, której tytuł zawierał słowo „dualność” :

■ *Le principe de dualite et la theorie des groupes simples et semi-simples,*

■ Automorfizm D_4 uogólnia dualność $X \mapsto -X^T$ dla diagramu A_n .

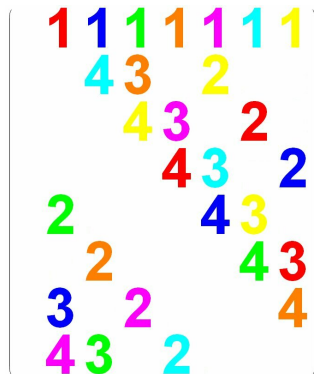
■ W języku angielskim przyjęła się nazwa „triale” dla określenia tego wyjątkowego automorfizmu.

Automorfizm Cartana

- $\mathfrak{so}(8) \subset M(8 \times 8)$ macierze antysymetryczne,

$$\mathfrak{so}(8) = \{(x_{ij})_{0 \leq i, j \leq 7} \mid x_{ij} = -x_{ji}\}$$

$$\dim(\mathfrak{so}(8)) = 1 + 2 + \dots + 7 = 7 \cdot 4 = 28.$$



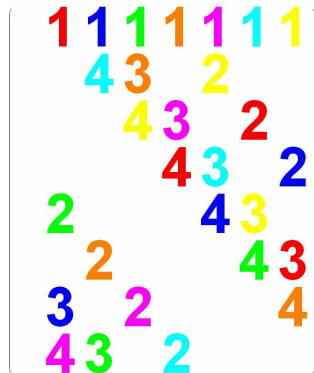
- Cartan wyróżnia niektóre wyrazy macierzy: 7 grup po 4 wyrazy.

- Wyróżnione czwórki składają się z ciągów

$$x_{0,i}, x_{i+1,i+5}, x_{i+4,i+6}, x_{i+2,i+3}$$

dla $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$
(dodawanie rozumiane modulo 7)

Automorfizm Cartana



■ Do każdej czwórki stosujemy przekształcenie zadane przez macierz

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

■ Brakujące wyrazy uzupełniamy tak, aby macierz była antysymetryczna.

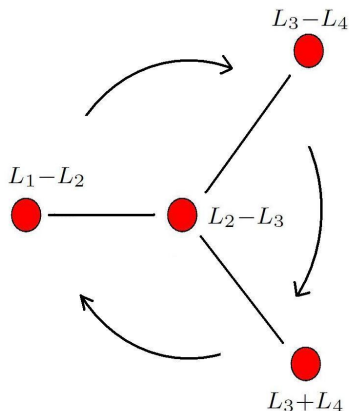
Automorfizm Cartana

- Otrzymane przekształcenie jest automorfizmem algebry Lie.
- Elementy niezmiennicze tworzą podalgebrę $\mathfrak{so}(8)^{\mathbb{Z}_3}$, która jest izomorficzna z algebrą wyjątkową $\mathfrak{g}_2$.
- $\mathfrak{so}(8)^{\mathbb{Z}_3} \subset \mathfrak{so}(8)$ działa trywialnie na $e_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.
- $\mathfrak{so}(8)^{\mathbb{Z}_3}$ działając na $\Lambda^3(e_0^\perp)^*$ zachowuje dokładnie jedną 3-formę (z dokładnością do skalarów).
- ω – 3-forma niezmiennicza ze względu na $\mathfrak{so}(8)^{\mathbb{Z}_3}$ zadaje mnożenie oktonionowe

$$(u \cdot v, w) = \omega(u, v, w)$$

dla $u, v, w \in e_0^\perp = im(\mathbb{O})$.

Automorfizm trójności na podalgebrze Cartana $\mathfrak{t}$



■ Skąd się wzięła macierz

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} ?$$

■ *Ćwiczenie z algebry liniowej:* formy $L_1 - L_2$, $L_2 - L_3$, $L_3 - L_4$, $L_3 + L_4$ stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}^4 = \mathfrak{t}^*$ oraz

■ przekształcenie zadane przez automorfizm diagramu po przejściu do bazy standardowej ma macierz jak wyżej*.

* Trzeba jeszcze przenieść bazę standardową $\mathfrak{t}^*$.