LE PRINCIPE DE DUALITÉ ET LA THÉORIE DES GROUPES SIMPLES ET SEMI-SIMPLES;

PAR M. E. CARTAN.

1. M. Weinstein, dans un Mémoire récent ([1]), a posé et résolu le problème suivant : *Faire correspondre, suivant une loi déterminée, à une matrice arbitraire* X *d'ordre n une autre matrice* X' *d'ordre n, de telle sorte qu'au produit* XY *de deux matrices quelconques corresponde le produit* X'Y' *des deux matrices correspondantes.*

Si l'on se borne au cas où les n^2 éléments de X' sont des fonctions *indépendantes* des n^2 éléments de X, et où les matrices considérées sont de déterminant égal à 1, le problème comporte deux solutions, données respectivement par les formules

$$X' = A^{-1} X A, \tag{1}$$

$$X' = A^{-1} \overline{X}^{-1} A, \tag{2}$$

où A désigne une matrice fixe arbitraire et $\overline{X}$ la matrice qui se déduit de X par l'échange des lignes et des colonnes.

Si l'on remarque que les n^2 éléments d'une matrice X sont les paramètres d'une substitution linéaire, le problème de M. Weinstein revient à trouver toutes les transformations de paramètres qui laissent invariante la loi de composition des substitutions du groupe

([1]) *Math. Zeitschr.*, t. XVI, 1923, p. 78-91.

linéaire. Une substitution de déterminant 1 pouvant être regardée comme définissant une homographie de l'espace à $n-1$ dimensions, les formules (1) et (2) fournissent toutes les transformations effectuées sur les homographies de l espace projectif qui conservent la *structure* de cet espace; les formules (1) et (2) montrent que *la structure de l'espace projectif est invariante dans le groupe mixte des homographies* [form. (1)] *et des corrélations* [(form. (2)]; on voit que, de ce point de vue, le *principe de dualité* s'introduit d'une manière nécessaire en Géométrie projective (¹).

Le problème de M. Weinstein est un cas particulier du problème général suivant :

Étant donné un groupe continu G *à r paramètres* $a_1, \ldots, a_r$, *trouver toutes les transformations qui, effectuées sur ces paramètres, laissent invariante la loi de composition des transformations du groupe*, ou encore *laissent invariante la structure du groupe.*

Si l'on désigne par S_a une quelconque des transformations du groupe G, on a une première solution du problème par la formule

$$S_{\xi'} = S_a^{-1} S_\xi S_a, \tag{3}$$

dans laquelle les a sont fixes; elle fait correspondre à la transformation variable S_ξ la transformation $S_{\xi'}$ en respectant évidemment la loi de composition des transformations du groupe. Les transformations de paramètres définies par l'équation (3) engendrent le *groupe adjoint* Γ de G, au sens de S. Lie.

Il peut arriver que les transformations du groupe adjoint soient les seules qui laissent invariante la structure du groupe; mais le contraire peut aussi se présenter : en ce cas, les transformations les plus générales forment un groupe Γ′ qui contient le groupe adjoint Γ comme sous-groupe invariant; si en effet dans la formule (3) on effectue sur les a, les ξ et les ξ' une *même* transformation T de Γ′, les transformations S_a, S_ξ, $S_{\xi'}$ se changent en S_b,

(¹) On peut dire de même que la structure de l'espace euclidien ordinaire est invariante par le groupe mixte des déplacements et des symétries; elle l'est aussi par le groupe des similitudes.

S_η, $S_{\eta'}$, et on a la relation

$$S_{\eta'} = S_b^{-1} S_\eta S_b,$$

qui montre bien que la transformation T laisse le groupe Γ invariant (la transformation de paramètres a de Γ étant simplement changée dans la transformation de paramètres b).

Toute transformation T de Γ′ sera théoriquement déterminée si l'on connaît l'effet qu'elle produit sur les transformations *infinitésimales* de G : il est évident, en effet, que la transformation identique de G est conservée par T, et que par suite toute transformation infinitésimale de G est changée par T en une autre transformation infinitésimale. Cela posé, soient

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_r,$$

les symboles de r transformations infinitésimales indépendantes de G avec les *relations de structure*

$$(X_i X_j) = \sum_s c_{ijs} X_s \qquad (i, j = 1, \ldots, r). \tag{4}$$

Par la transformation T, les transformations X_i subissent une substitution linéaire

$$X'_i = \sum_k \alpha_{ik} X_k \qquad (i = 1, \ldots, r). \tag{5}$$

Les coefficients α_{ik} sont assujettis à satisfaire aux relations algébriques

$$\sum_{k,l} \alpha_{ik}\alpha_{jl} c_{kls} = \sum_t c_{ijt}\alpha_{ts} \qquad (i, j, s = 1, \ldots, r), \tag{6}$$

qui expriment que la substitution (5) conserve les relations (4). Les formules (6) définissent donc en somme le groupe Γ′.

2. Le problème est particulièrement intéressant dans le cas où le groupe G est simple ou semi-simple. Dans ce cas en effet toute transformation *infinitésimale* de Γ′ laissant invariant le groupe adjoint continu Γ, qui est simple ou semi-simple, fait partie du groupe adjoint lui-même (¹). Si donc le groupe Γ′ n'est pas

(¹) E. Cartan, *Thèse* (Paris, Nony, 1894), p. 113.

confondu avec Γ, il est formé de plusieurs familles continues discrètes de transformations (groupe *mixte* d'après S. Lie), dont une seule forme un groupe (à savoir le groupe adjoint). C'est ce qui se passe dans l'exemple cité plus haut, où l'on a les deux familles définies par (1) et (2).

On sait que toute transformation infinitésimale *générale* Y [1] de G fait partie d'un sous-groupe abélien γ dont l'ordre est égal au rang l du groupe et qui est défini par l'ensemble des transformations infinitésimales échangeables avec Y. Ce sous-groupe n'est invariant dans aucun sous-groupe plus grand de G. Les sous-groupes γ dépendent essentiellement de $r - l$ paramètres, puisque Y dépend de r paramètres et que ∞^l transformations Y distinctes donnent le même sous-groupe γ. D'autre part, quand on effectue sur un sous-groupe γ les ∞^r transformations du groupe adjoint, on obtient évidemment ∞^{r-l} sous-groupes γ, puisqu'il existe ∞^l transformations du groupe adjoint qui laissent γ invariant. Il est donc à présumer que les différents sous-groupes γ sont tous homologues entre eux par rapport au groupe adjoint. Mais le raisonnement précédent n'est pas suffisant pour le démontrer, car les différents sous-groupes γ pourraient *a priori* former plusieurs familles distinctes (non homologues entre elles), chacune étant néanmoins à $r - l$ dimensions. *Nous allons voir que cette dernière éventualité ne peut pas se présenter.*

En effet, tout sous-groupe γ est formé des r transformations $\Sigma e_i X_i$ définies par les r équations linéaires (dont $r - l$ seulement sont indépendantes)

$$\sum_{i,k} a_i e_k c_{iks} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, r),$$

où les *paramètres* arbitraires a_i sont assujettis à l'unique condition de ne pas annuler un certain polynome algébrique entier $\psi_{r-l}(a_1, \ldots, a_r)$. Il en résulte que, *dans le domaine complexe*, on peut toujours passer *par continuité* d'un sous-groupe γ arbi-

[1] Cela signifie que son *équation caractéristique* admet le nombre minimum (à savoir l) de racines nulles. L'équation caractéristique de Y est celle à laquelle on est conduit en cherchant les valeurs de λ pour lesquelles il existe une transformation infinitésimale Z telle que l'on ait $(YZ) = \lambda Z$.

traire à tout autre sous-groupe γ. Les sous-groupes γ forment donc *un seul domaine connexe*. Si l'hypothèse envisagée était exacte, on pourrait trouver un sous-groupe γ_0 qui ne serait pas homologue avec tous les sous-groupes γ infiniment voisins; or cela contredit la transitivité, dans le domaine infinitésimal, du groupe adjoint considéré en tant qu'opérant sur les sous-groupes γ.

Cela posé, soit Y une transformation générale du groupe G, soit Y' la transformation qui s'en déduit par une transformation T donnée de Γ'; soient γ et γ' les sous-groupes abéliens correspondant à Y et Y'; soit enfin Θ une transformation du groupe adjoint transformant γ' en γ. *La transformation* $T\Theta^{-1}$ *de* Γ' *laissera fixe le sous-groupe* γ.

Il suffira donc de déterminer toutes les transformations T qui laissent invariant un sous-groupe γ fixé une fois pour toutes, et de les multiplier ensuite par une transformation arbitraire du groupe adjoint. D'autre part, si deux transformations T et T' laissant invariant le sous-groupe γ transforment de la même manière les transformations infinitésimales de γ, la transformation $T'T^{-1}$ laisse invariante chacune de ces transformations, et l'on démontre facilement alors qu'elle appartient au groupe adjoint.

Finalement, *tout revient à chercher les transformations de* Γ' *qui laissent invariant le sous-groupe* γ *et à étudier de quelle manière elles transforment entre elles les transformations de* γ.

3. Rappelons que les racines de l'équation caractéristique d'une transformation arbitraire $\Sigma e_i Y_i$ de γ sont $r - l$ formes linéaires $\omega_1, \ldots, \omega_{r-l}$ en $e_1, \ldots, e_l$ et que $r - 2l$ d'entre elles sont des combinaisons linéaires à coefficients *entiers* déterminés des l autres (dites *fondamentales*). A chacune des $r - l$ racines ω_α est *associée* une transformation déterminée Y_α du sous-groupe γ. *Toute transformation* T *aura pour effet d'effectuer sur les* $r - l$ *transformations* Y_α *associées aux* $r - l$ *racines* ω_α, *et par suite aussi sur ces racines elles-mêmes, une substitution* [1] *assujettie à la seule condition de laisser invariantes les rela-*

[1] Il s'agit d'une substitution sur $r - l$ objets, chacun de ces objets étant remplacé par un autre.

tions linéaires à coefficients entiers qui lient ces $r - l$ racines. L'ensemble de ces substitutions forme un groupe fini de $r - l$ lettres que nous appellerons $\mathcal{G}$ [1].

Il peut arriver que certaines des substitutions de $\mathcal{G}$ dérivent de transformations du groupe adjoint. Voici comment on peut les avoir.

A chaque racine ω_α est associé un groupe à trois paramètres g_α de G, engendré par la transformation infinitésimale Y_α de γ associée à ω_α, et par deux autres transformations (ne faisant pas partie de γ) X_α et X'_α. Le sous-groupe correspondant du groupe adjoint contient, en dehors de la transformation identique, une autre transformation laissant invariant le sous-groupe γ, et cette transformation change la transformation Y_λ associée à une racine ω_λ dans la transformation $Y_\mu = Y_\lambda + a_{\alpha\lambda} Y_\alpha$ associée à la racine $\omega_\lambda + a_{\lambda\alpha}\omega_\alpha$, les $a_{\alpha\lambda}$ étant des entiers déterminés [2]. A la racine ω_α correspond donc ainsi une certaine substitution Θ_α portant sur les $r - l$ transformations Y_λ et faisant partie du groupe adjoint. Ces substitutions Θ_α engendrent (par elles-mêmes et par leurs produits) un groupe fini $\mathcal{G}'$, sous-groupe (invariant) de $\mathcal{G}$.

Si le groupe $\mathcal{G}'$ est identique à $\mathcal{G}$, le groupe Γ' se confond avec le groupe adjoint continu Γ. Si $\mathcal{G}'$ est un sous-groupe d'indice h de $\mathcal{G}$, le groupe Γ' sera formé de h familles continues discrètes de transformations, et l'on aura immédiatement une transformation particulière de chacune de ces familles.

4. L'étude comparée des deux groupes finis $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ n'offre aucune difficulté, dans le cas où le groupe $\mathcal{G}$ est simple. Les deux groupes $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ ne sont distincts que pour trois types de groupes simples, à savoir :

Le type **A** de rang $l \geqq 2$;
Le type **D** de rang $l \geqq 4$;
Le type **E** de rang $l = 6$.

Dans le cas du type **A** (groupe projectif à l variables), le

(1) J'ai étudié ce groupe dans un Mémoire intitulé : *Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe de transformations fini et continu* (*Amer. J. of Math.*, t. XVIII, 1896, p. 1-61).

(2) E. CARTAN, *Thèse*, p. 57.

groupe $\mathcal{G}$ est d'ordre $2(l+1)!$, tandis que le groupe $\mathcal{G}'$ est seulement de l'ordre $(l+1)!$. On a donc ici $h = 2$. Les deux familles de transformations de Γ' s'obtiennent, la première en transformant une transformation de G par une *homographie* fixe, la seconde en la transformant par une *corrélation* fixe. On voit ici le rôle du *principe de dualité* en Géométrie projective.

Dans le cas du type **D** de rang $l > 4$, le groupe $\mathcal{G}$ est d'ordre $2^l l!$ Les racines ω_α étant mises sous la forme

$$\pm\omega_i \pm \omega_j \qquad (i, j = 1, \ldots, l),$$

on obtient une substitution de $\mathcal{G}$ en effectuant sur les indices $1, \ldots, l$ une permutation quelconque et en changeant les signes d'un nombre quelconque des quantités ω_i. Le groupe $\mathcal{G}'$ n'est que de l'ordre $2^{l-1} l!$; il est formé des substitutions de $\mathcal{G}$ correspondant à un nombre *pair* de changements de signes.

Si l'on prend pour G le groupe linéaire d'une forme quadratique non dégénérée à $2l$ variables, le groupe Γ' est formé de deux familles obtenues en transformant une transformation orthogonale de G, soit par une transformation orthogonale à déterminant égal à $+1$ (groupe adjoint), soit par une transformation orthogonale à déterminant égal à -1.

Dans le cas du type **E** de rang 6, le groupe $\mathcal{G}'$ est isomorphe au groupe de Galois de l'équation qui donne les 27 droites d'une surface du troisième ordre; il contient

$$27 \times 16 \times 10 \times 6 \times 2$$

substitutions. Le groupe $\mathcal{G}$ est d'ordre double [1]. Si l'on prend pour G le groupe linéaire de la forme cubique

$$J = \sum x_i y_k z_{ik} - \sum z_{\alpha\beta} z_{\gamma\delta} z_{\lambda\mu},$$

le groupe Γ' s'obtient en transformant les transformations de G, soit par une homographie, soit par une corrélation laissant invariante la variété $J = 0$.

5. Reste le cas du type **D** de rang 4 (groupe linéaire d'une

(1) *Voir* E. CARTAN, *loc. cit.* (*Amer J. of Math.*, p. 35-43).

forme quadratique non dégénérée à 8 variables). Ce cas est le plus intéressant. Le groupe $\mathcal{G}'$ est ici, comme dans le cas général, d'ordre $2^{l-1}l! = 2^3.4!$, tandis que le groupe $\mathcal{G}$ est d'ordre trois fois plus grand que dans le cas général, donc d'ordre $3.2^3.4!$ L'indice h est égal à 6. La particularité qui se présente ici provient de ce que l'on peut remplacer les quantités ω_i qui entrent dans l'expression générale des racines $\pm\omega_i \pm \omega_j$, par des expressions de la forme $\frac{1}{2}\left(\pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \omega_4\right)$.

Supposons la forme quadratique invariante par G réduite à la forme canonique

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_7^2.$$

Toute transformation infinitésimale de G est de la forme

$$\sum_{i,j} a_{ij}\left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \qquad (a_{ij} = -a_{ji}).$$

Cela posé soit i un quelconque des indices 1, 2, ..., 7 et considérons les 7 ensembles de 4 composantes

$$a_{0,i}, \quad a_{i+1,i+5}, \quad a_{i+4,i+6}, \quad a_{i+2,i+3},$$

où l'on suppose que tout indice supérieur à 7 est identique au même indice diminué de 7. Considérons les substitutions

$$H = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

et

$$K = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

elles engendrent un groupe fini d'ordre 6, contenant, outre H, K

et la substitution identique, les substitutions

$$H^2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix},$$

$$HK = KH^2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix},$$

$$H^2K = KH = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

Toute transformation de Γ' s'obtient en effectuant, pour chaque valeur 1, 2, ..., 7 de l'indice i, l'une des six substitutions précédentes sur les quantités

$$a_{0,i}, \quad a_{i+1,i+5}, \quad a_{i+4,i+6}, \quad a_{i+2,i+3},$$

et en effectuant ensuite une transformation du groupe adjoint.

Les résultats précédents se lient à un système de nombres complexes, inventé par Graves et Cayley, qui généralise les quaternions, et qu'on appelle les *octaves*. Considérons 7 *unités* $e_\alpha (\alpha = 1, \ldots, 7)$ satisfaisant aux lois de multiplication

$$e_\alpha^2 = -1,$$

$$\begin{aligned} e_\alpha = e_{\alpha+1}e_{\alpha+5} &= -e_{\alpha+5}e_{\alpha+1} = e_{\alpha+4}e_{\alpha+6} \\ &= -e_{\alpha+6}e_{\alpha+4} = e_{\alpha+2}e_{\alpha+3} = -e_{\alpha+3}e_{\alpha+2}. \end{aligned}$$

Bull. des Sciences mathém., 2e série, t. XLIX. (Décembre 1925.)

Un octave est un nombre complexe de la forme

$$X = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_7 e_7;$$

le produit $Z = \Sigma z_i e_i$ de deux octaves

$$X = \Sigma x_i e_i, \qquad Y = \Sigma y_i e_i$$

jouit de la propriété exprimée par la formule

$$z_0^2 + z_1^2 + \ldots + z_7^2 = (x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_7^2)(y_0^2 + y_1^2 + \ldots + y_7^2).$$

Cela posé, effectuons sur les composantes x_i de l'octave X une substitution orthogonale donnée A (de déterminant égal à 1); il sera possible de déterminer une substitution orthogonale B telle que, quelles que soient les deux octaves X et Y, le produit AX.BY se déduise du produit XY par une substitution orthogonale C convenablement choisie. Le passage de la substitution A à la substitution B est donné par une transformation de Γ' qui n'est autre que celle fournie par la substitution H^2 [1], et le passage de A à C est fourni par la substitution H^2K.

Il y a une infinité de transformations de G invariantes par les substitutions H et K; toutes ces transformations laissent invariante la variable x_0 et transforment les sept autres variables suivant un groupe simple à 14 paramètres du type **G**.

6. On peut encore présenter les résultats précédents sous une forme géométrique, différente seulement en apparence de la précédente. On peut prendre pour groupe G le groupe conforme de l'espace à six dimensions. Supposons le ds^2 de cet espace réduit à la forme

$$dx_1\,dx_4 + dx_2\,dx_5 + dx_3\,dx_6.$$

Il existe deux familles de variétés planes à trois dimensions *totalement isotropes*, c'est-à-dire jouissant de la propriété que deux points quelconques d'une telle variété sont sur une même droite isotrope, tout entière contenue dans la variété. Les équa-

(1) Cette transformation de Γ', appliquée à une transformation *infinitésimale* de G, est uniforme; appliquée à une transformation finie A, elle donne deux transformations B et $-$B (qui seraient du reste identiques si on les regardait comme des transformations *projectives* de l'espace à sept dimensions).

tions générales des variétés V′ de la première famille sont

$$(7)\quad \begin{cases} x_4 - a_4 + a_2 x_3 - a_3 x_2 = 0; \\ x_5 - a_5 + a_3 x_1 - a_1 x_3 = 0, \\ x_6 - a_6 + a_1 x_2 - a_2 x_1 = 0; \end{cases}$$

celles des variétés V″ de la seconde famille sont

$$(8)\quad \begin{cases} x_1 - b_1 + b_2 x_3 - b_3 x_2 = 0, \\ x_5 - b_5 + b_3 x_4 - b_4 x_3 = 0, \\ x_6 - b_6 + b_4 x_2 - b_2 x_4 = 0. \end{cases}$$

Les variétés V′, aussi bien que les variétés V″, dépendent de six paramètres.

Les *points*, les *variétés* V′ et les *variétés* V″ jouissent de certaines propriétés communes. D'abord, de même qu'il passe par un point ∞^1 droites isotropes, il existe sur une V′ ou une V″ également ∞^1 droites isotropes. Convenons de dire que deux points sont *unis* si la droite qui les joint est isotrope; il peut arriver également que deux variétés V′ distinctes aient en commun une droite isotrope (et alors il n'y en a qu'une), nous dirons qu'elles sont *unies;* deux variétés V′ non unies n'ont aucun point commun. On définit de même deux variétés V″ unies.

Convenons de dire qu'une variété V′ est *en incidence* avec un point M quand elle contient ce point : il existe alors ∞^2 droites isotropes passant par M et contenues dans V′. On définira de même l'incidence d'une variété V″ et d'un point. De même, une variété V′ et une variété V″ n'ont en général aucune droite (isotrope) commune (mais seulement un point); s'ils ont une droite commune, ils en ont ∞^2; nous dirons qu'elles sont *en incidence*.

Les conditions pour que deux points de coordonnées (x) et (x'), deux variétés V′ de paramètres (a) et (a'), deux variétés V″ de paramètres (b) et (b') soient unies sont respectivement

$$\begin{aligned} (x'_1 - x_1)(x'_4 - x_4) + (x'_2 - x_2)(x'_5 - x_5) + (x'_3 - x_3)(x'_6 - x_6) &= 0, \\ (a'_1 - a_1)(a'_4 - a_4) + (a'_2 - a_2)(a'_5 - a_5) + (a'_3 - a_3)(a'_6 - a_6) &= 0, \\ (b'_1 - b_1)(b'_4 - b_4) + (b'_2 - b_2)(b'_5 - b_5) + (b'_3 - b_3)(b'_6 - b_6) &= 0. \end{aligned}$$

De même, les équations (7) et (8) expriment les conditions d'incidence d'un point et d'une variété (V′) et (V″). Les conditions d'incidence d'une variété (V′) et d'une variété (V″) sont de même

$$(9)\qquad \begin{cases} b_4 - a_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0, \\ b_5 - a_5 + a_3 b_1 - a_4 b_3 = 0, \\ b_6 - a_6 + a_4 b_2 - a_2 b_1 = 0. \end{cases}$$

On voit d'après ce qui précède que les notions d'*union* et d'*incidence* sont communes aux trois ensembles d'êtres géométriques ou *éléments* (points, variétés V′, variétés V″), soit que l'on considère deux éléments de même espèce, soit que l'on considère deux éléments d'espèces différentes. Nous affecterons ces trois espèces d'éléments de trois indices 0, 1, 2.

On vérifie facilement qu'un élément donné d'espèce i est en incidence avec ∞^3 éléments d'espèce différente j, et que ces ∞^3 éléments sont deux à deux unis. Réciproquement, s'il existe ∞^3 éléments d'espèce i deux à deux unis, ils sont en incidence avec un même élément d'espèce différente. On vérifie aussi que deux éléments unis d'espèce i sont en incidence avec ∞^1 éléments d'espèce $j \neq i$, et que réciproquement deux éléments d'espèce i en incidence avec ∞^1 éléments d'espèce différente sont unis.

7. Cela posé, nous allons considérer, à côté des transformations conformes proprement dites, directes et inverses, d'autres transformations. Cherchons à faire correspondre, suivant une loi déterminée, à tout élément d'espèce donnée i, un élément d'une autre espèce donnée i', avec la condition qu'à deux éléments d'espèce i unis correspondent deux éléments d'espèce i' unis. On voit facilement que de telles correspondances existent. Si par exemple $i = 1$, $i' = 2$, il faudra déterminer six fonctions $b_1, b_2, \ldots, b_6$ de $a_1, \ldots, a_6$, de manière que l'équation de Monge

$$db_1\, db_4 + db_2\, db_5 + db_3\, db_6 = 0.$$

soit une conséquence de l'équation de Monge

$$da_1\, da_4 + da_2\, da_5 + da_3\, da_6 = 0 :$$

la solution générale s'obtient en partant d'une transformation conforme arbitraire, en regardant les b_i comme les coordonnées du point transformé du point (a_i). Il y a même deux familles continues de correspondances satisfaisant à la condition imposée.

Prenons une de ces correspondances, et soit $j \neq i$. Considérons un élément d'espèce j : il existe ∞^3 éléments d'espèce i en incidence avec lui, et ils sont deux à deux unis. Il leur correspondra ∞^3 éléments d'espèce i', deux à deux unis, et par suite en incidence avec un même élément d'espèce différente. Soit j' cette espèce. Nous établissons ainsi une correspondance entre un élément quelconque d'espèce j et un élément d'espèce j'. De plus, deux éléments unis d'espèce j étant en incidence avec ∞^1 éléments d'espèce i, les deux éléments correspondants d'espèce j' seront en incidence avec ∞^1 éléments d'espèce i' et par suite seront unis. Si enfin k est le troisième indice autre que i et j, et k' le troisième indice autre que i' et j', à tout élément d'espèce k nous pouvons faire correspondre comme ci-dessus un élément d'espèce k' par l'intermédiaire des ∞^3 éléments d'espèce i qui sont en incidence avec lui; à deux éléments unis d'espèce k correspondront deux éléments unis d'espèce k'. On démontre facilement qu'à deux éléments en incidence d'espèces j et k correspondront deux éléments en incidence d'espèces j' et k'.

Nous avons donc finalement, à toute substitution portant sur les trois indices 0, 1, 2, fait correspondre une famille continue de transformations changeant deux éléments unis en deux éléments unis et deux éléments en incidence en deux éléments en incidence. L'ensemble de toutes ces transformations forme un groupe mixte, formé de six familles discrètes, qui prolonge le groupe conforme de la même manière que le groupe des homographies et des corrélations prolonge le groupe des homographies en Géométrie projective. On peut dire que le *principe de dualité* de la Géométrie projective est remplacé ici par un *principe de trialité*.

Il y a cependant une différence essentielle entre les corrélations de la Géométrie projective et les nouvelles transformations adjointes au groupe conforme de l'espace à six dimensions, c'est que ces dernières *ne peuvent pas être définies comme des transformations de contact*; cela tient à ce que les variétés qui correspondent à un point arbitraire satisfont (au sens de Lie) à une même équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0.$$

Il est facile maintenant de définir les six familles de transforma tions du groupe Γ' qui conservent la structure du groupe conforme. Il suffit de faire correspondre à une transformation arbitraire de G celle qui s'en déduit par une transformation du groupe conforme mixte prolongé.

8. Revenons au problème général. Le cas des groupes semi-simples est facile à discuter. Si un tel groupe G est formé de plusieurs sous-groupes simples de p structures différentes, à savoir α_1 de la première structure, α_2 de la seconde, etc., le nombre h des familles discrètes de transformations constituant le groupe Γ', s'obtient immédiatement si l'on connaît les nombres $h_1, h_2, \ldots, h_p$ correspondant aux p structures données. On a

$$h = \alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_p!\,h_1^{\alpha_1}h_2^{\alpha_2}\ldots h_p^{\alpha_p}.$$

Un cas simple est celui du groupe G des substitutions orthogonales (de déterminant 1) à quatre variables, groupe qui n'est que semi-simple, étant formé de deux sous-groupes simples à trois paramètres de rang 1. On a ici $p = 1$, $h_1 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $h = 2$. Cela est d'accord avec le résultat général relatif au groupe orthogonal à un nombre pair de variables (n° 4).

Matematica. — *Sur les espaces de Riemann dans lesquels le transport par parallélisme conserve la courbure.* **Nota di E. Cartan, presentata** [1] **dal Socio T. Levi-Civita.**

Dans une note récente [2], M. Harry Levy s'est proposé de rechercher l'expression générale des ds^2 pour lesquels les symboles de Riemann à cinq indices sont tous nuls. Je viens précisément de m'occuper du même problème et je désirerais signaler rapidement une partie des résultats auxquels je suis arrivé.

Le problème s'est posé à moi sous la forme suivante: *Trouver tous les espaces de Riemann jouissant de la propriété que la courbure riemanienne d'une facette quelconque se conserve lorsqu'on lui fait subir un transport par parallélisme quelconque.* Je suppose le ds^2 défini et je me borne aux solutions irréductibles du problème, c'est-à-dire à celles pour lesquelles le ds^2 ne peut pas être regardé comme la somme de deux autres éléments linéaires à variables indépendents qui soient eux-mêmes des solutions du problème.

1. On sait qu'à tout point A d'un espace de Riemann on peut attacher un groupe de rotations Γ (groupe de holonomie) [3] qui indique les rotations subies par le corps des vecteurs issus de A quand on le transporte par parallélisme le long d'un cycle arbitraire; ce groupe est le même en tous les points de l'espace. Il est évident que le groupe Γ laisse invariante la forme de Riemann

$$\text{(1)} \qquad R = R_{ijkh}\, x^i y^j x^k y^h$$

dont dépend la courbure riemanienne de la facette définie par les deux vecteurs x^i et y^j.

Le problème proposé peut alors se ramener à la recherche de tous les groupes de rotations Γ qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane

(1) Nella seduta del 18 aprile 1926.

(2) «Rendiconti», (6) 3^1, 1926, pp. 65-69.

(3) E. Cartan, «Ann. Ec. Norm.», (3) 42, 1925, p. 21; voir aussi E. Cartan, *La Géométrie des espaces de Riemann*, «Mémorial des Sc. Math.», Gauthier-Villars, 1925, p. 54 et 55; et un mémoire des «Acta Math.», t. 48, 1925.