Michał Adamaszek

Stabilne przestrzenie odwzorowań wymiernych

Skrót: „stabilizacja $Hol(X,Y)$ w $Map(X,Y)$, do wymiaru $k(d)$" oznacza, że włożenie $Hol_d(X,Y) \hookrightarrow Map_d(X,Y)$ jest izomorfizmem do wymiaru $k(d)$.

- **Funkcje holomorficzne z $\mathbb{CP}^m$ do $\mathbb{CP}^n$**
  - **[Seg79]** Stabilizacja $Hol(\mathbb{CP}^1,\mathbb{CP}^n)$ w $Map(\mathbb{CP}^1,\mathbb{CP}^n)$ do wymiaru $(2n-1)d$ w grupach homotopii. Stabilizacja $Hol_d(\mathbb{CP}^1,\mathbb{CP}^n)$ przez dodawanie "punktu w nieskończoności". Część stabilna: „scanning map" daje $Hol_\infty(\mathbb{CP}^1,\mathbb{CP}^n) \approx \Omega^2(\mathbb{CP}^\infty \vee \mathbb{CP}^\infty)$
  - **[Mos06]** Stabilizacja $Hol(\mathbb{CP}^m,\mathbb{CP}^n)$ w $Map(\mathbb{CP}^m,\mathbb{CP}^n)$ do wymiaru $(2n-2m+1)(\frac{d+1}{2}+1)$ dla $m \le n$ w homologiach i do tego samego wymiaru w grupach homotopii dla $m < n$. Stabilizacja $Hol_d(\mathbb{CP}^1,\mathbb{CP}^n)$ przez branie funkcji wymiernych w zmiennych holomorficznych i antyholomorficznych. Część stabilna wyniku z tw. Stonea-Weierstrassa.
- **Uogólnienia [Seg79]** Stabilizacja $Hol(\mathbb{CP}^1,X)$ w $Map(\mathbb{CP}^1,X)$ dla:
  - **[Kir86]** X — Grassmanian
  - **[Gra89]** $X = \Omega G$ i $X = G/P$
  - **Guest, Mann, Milgram, Hurtubise etc.** X — rozmaitości flag, uogólnione rozmaitości flag G/P etc.
  - **Guest** X – toryczna
  - **[BHM01]** X — zwarta rozm. kahlerowska z odpowiednio ładnym działaniem rozwiązalnej grupy Lie, równoważność w homologiach do wymiaru $c(X)\min(d_i)-1$, gdzie $d = (d_1,\ldots,d_k)$ – stopień wyznaczony przez przekształcenie indukowane na π_2 i w grupach homotopii do trochę mniejszego wymiaru. Uogólnienie wyników wymienionych wyżej.
  - **[CJS99]** X — rozmaitość symplektyczna ze strukturą prawie zespoloną J, a Hol oznacza funkcje J-holomorficzne, kiedy to się da
  - **[GKY]** X — $\mathbb{CP}^n$ z wyciętymi punktami o co najmniej dwóch współrzędnych 0 („subspace arrangement"; chodzi o takie funkcje wymierne, że każde jej dwie współrzędne są względnie pierwszymi wielomianami), homotopijnie do wymiaru d
- **Inne**
  - **[Cra93]** Stabilizacja $FHol(\mathbb{CP}^1,\mathbb{CP}^n)$ w $Hol(\mathbb{CP}^1,\mathbb{CP}^n)$, homotopijnie do wymiaru $2(d-n)$. Tutaj $FHol(\mathbb{CP}^1,\mathbb{CP}^n)$ oznacza przestrzeń tych funkcji holomorficznych, których obraz nie leży w żadnym $\mathbb{CP}^{n-1}$ zawartym w $\mathbb{CP}^n$. Ponadto wyliczenie homologii $FHol(\mathbb{CP}^1,\mathbb{CP}^2)$.
  - **[Mos01]** Stabilizacja $Rat(\mathbb{RP}^1,\mathbb{RP}^n)$ w $Map(\mathbb{RP}^1,\mathbb{RP}^n)$, homotopijna do wymiaru $d(n-1)$.
  - **Lin** Włożenie $Hol_d(\mathbb{CP}^1,X) \hookrightarrow Hol_{dp}(\mathbb{CP}^1,X)$ przy pomocy przekształcenia $z \mapsto z^p$ daje izomorfizmy w wymiernych homotopiach do wymiaru $k(d)$ dążącego do ∞ wraz z d.

  - **Sasao + Yam,Kozł** Włożenie $Hol_1^*(\mathbb{CP}^m, \mathbb{CP}^n) \hookrightarrow Map_1^*(\mathbb{CP}^m, \mathbb{CP}^n)$ jest izomorfizmem na grupach homotopii do wymiaru $4n - 4m + 1$ i podobnie dla przekszt. niepunktowanych. Ponadto $Hol_1(\mathbb{CP}^m, \mathbb{CP}^n) \approx PW_{n+1,m+1}$.
  - **Yam** $Map_1(\mathbb{RP}^m, \mathbb{RP}^n)$ jest homotopijnie równoważne z $PV_{n+1,m+1}$ do wymiaru $2n - 2m + 1$

- **Pomocnicze, włożenia stabilizujące etc.**
  - **[Eps73]** $\pi_1(Hol_d^*(\mathbb{CP}^1, \mathbb{CP}^1)) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(Hol_d(\mathbb{CP}^1, \mathbb{CP}^1)) = \mathbb{Z}_{2d}$
  - **Arnold** Włożenie przestrzeni konfiguracyjnych $C_d(\mathbb{C}) \hookrightarrow C_{d+1}(\mathbb{C})$ polegające na „dodaniu punktu w nieskończoności” jest homologiczną równoważnością do wymiaru $d/2$.
  - **Segal** Włożenie przestrzeni par rozłącznych dywizorów $Q_d(\mathbb{C}) \hookrightarrow Q_{d+1}(\mathbb{C})$ jest homologiczną równoważnością do wymiaru $(2n - 1)d$.

TODO: dopisać brakujących autorów i prace do bibliografii

Bibliografia

[BHM01] C.P. Boyer, J.C. Hurtubise, R.J. Milgram, Stability theorems for spaces of rational curves, *Int. J. Math. 12 (2001) 223-262*

[CJS99] R.Cohen, J.Jones, G.Segal, Stability for holomorphic spheres and Morse theory, *Contemporary Mathematics vol 258 (2000) 87-106*

[Cra93] T.A. Crawford, Full holomorphic maps from the Riemann sphere to complex projective spaces, *J. Diff. Geom. 38 (1993) 161-189*

[Eps73] S.I. Epshtein, Fundamental groups of spaces of coprime polynomials, *Funct. Anal. Appl. 7 (1973) 82-83*

[GKY] M.A. Guest, A. Kozłowski, K. Yamaguchi, The topology of spaces of coprime polynomials, preprint?

[Gra89] J. Gravesen, On the topology of spaces of holomorphic maps, *Acta. Math. 162 (1989) 247-268*

[Gro89] M. Gromov, Oka's principle for holomprphic sections of elliptic bundles, *J. Am. Math. Soc. 2 (1989) 851-897*

[Hur96] J.C. Hurtubise, Holomorphic maps of a Riemann surface into a flag manifold, *J. Diff. Geom 43 (1996) 99-118*

[Kal98] S.Kallel, Divisor spaces on punctured Riemann surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998) 135-164*

[Kir86] F.C. Kirwan, On spaces of maps from Riemann surfaces to Grassmanians and applications to the cohomology of moduli vector bundles, *Ark.Math. 24 (1986) 221-275*

[KoY03] A.Kozłowski, K.Yamaguchi, Spaces of holomorphic maps between complex projective spaces of degree one, *Topology Appl. 132 (2003) 139-145*

[Mos01] J.Mostovoy, Spaces of rational loops on a real projective space, *Tr. Am. Math. Soc 353 (2001) 1959-1970*

[Mos06] J.Mostovoy, Spaces of rational maps and the Stone-Weierstrass theorem, *Topology 45 (2006) 281-193*

[Seg79] G.Segal, The topology of spaces of rational functions, *Acta Math. 143 (1979) 39-72*

[Yam04] K.Yamaguchi, Fundamental groups of spaces of holomorphic maps and group actions, *J.Math. Kyoto Univ. 44-3 (2004) 479-492*