# Motywy Vladimira Voevodskiego

Marcin Chałupnik Andrzej Weber

maj 2003

## 0 Wstęp

Vladimir Voevodsky otrzymał medal Fieldsa w 2002 r. za prace z pogranicza geometrii algebraicznej i topologii. Często wymienianym osiągnięciem laureata jest dowód hipotezy Milnora wiążącej K–teorię i kohomologie Galois. Obie teorie opisują pewne własności arytmetyczne ciał. Dowód hipotezy Milnora wymagał rozwinięcia nowej teorii kohomologii dla rozmaitości algebraicznych. Najważniejszym wkładem Voevodskiego było rozszerzenie kategorii rozmaitości algebraicznych tak aby można było w niej używać metod teorii homotopii. Metodami tymi Voevodski skonstruował swe "kohomologie motywiczne", których użył do dowodu hipotezy Milnora. Waga prac Voevodskiego, poza ich konkretnymi zastosowaniami, polega na tym, że pokazują one, jak formalizm teorii homotopii, będącej potężnym narzędziem topologii algebraicznej, można z powodzeniem stosować w innych dziedzinach matematyki.

Zanim przejdziemy do naszkicowania podstaw teorii Voevodskiego warto powiedzieć kilka zdań o nim samym oraz o niekonwencjonalnej strategii jego pracy badawczej. Vladimir Voevodsky studiował na Państwowym Uniwersytecie Moskiewskim. W 1989 roku wyjechał na studia doktoranckie na Uniwersytet Harvarda, gdzie w r. 1992 uzyskał doktorat pod opieką D. Kazhdana. Mniej więcej w tym okresie rozpoczął pracę nad motywicznymi kohomologiami. Pomysł ich konstrukcji, zainspirowany pewnymi wynikami A. Suslina, przedstawił w liście otwartym do A. Beilinsona ([V1]) datowanym 6–go grudnia 1992. Od tego momentu Voevodsky umieszczał na ogólnodostępnym serwerze[1] liczne artykuły w których rozwijał swoją teorię. Jednak prace te zawierały w wielu kluczowych miejscach jedynie szkice dowodów, a kolejne wersje zmieniały w istotny sposób podstawowe konstrukcje. Wątpliwości pogłębiał fakt, iż żadna z tych prac nie była publikowana w recenzowanym czasopiśmie. Mimo to idee Voevodskiego zjednywały sobie stopniowo uznanie środowiska matematycznego. Od połowy lat dziewięćdziesiątych zaczęły się ukazywać omówienia jego prac autorstwa znanych matematyków takich jak E. Friedlander, B. Kahn ([Fr], [Ka] — artykuły w Seminarium Bourbaki), S. Bloch, P. Deligne czy C. Weibel. Pod koniec lat dziewięćdziesiątych teoria Voevodskiego mniej więcej

[1] Jest to serwer *K–theory* `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/`. Ponadto prace związane z tematyką motywicznych kohomologii można znaleźć pod adresem internetowym `http://math.ias.edu/~vladimir/seminar.html`.

się wykrystalizowała i jej zasadnicze idee autor w jasny sposób wyłożył na odczycie wygłoszonym na ICM'98 w Berlinie ([V3]). W szczególności, dzięki wysiłkom Voevodskiego oraz jego współpracowników (A. Suslin, E. Friedlander, F. Morel, M. Rost), udało się wypełnić luki w dowodzie hipotezy Milnora będącym najważniejszym jak dotąd zastosowaniem jego teorii. Wydaje się, że rozpoczął się proces aktywnego asymilowania idei Voevodskiego przez matematyków nie będących jego bezpośrednimi współpracownikami. W ciągu ostatnich kilku lat powstało wiele prac dla których wyniki Voevodskiego stanowią punkt wyjścia do dalszych badań.

Omówienie prac Voevodskiego rozpoczniemy od naszkicowania historycznego kontekstu z jakiego wyrosły. Następnie omówimy podstawy jego teorii koncentrując się na opisie jej najważniejszej części jaką są "kohomologie motywiczne". Na koniec spróbujemy przybliżyć czytelnikowi problematykę związaną z hipotezą Milnora.

Autorzy dziękuja za pomoc w przygotowaniu artykułu profesorom S. Betleyowi, A. Białynickiemu-Biruli, J. Browkinowi, R. Polowi i M. Szyjewskiemu.

# 1 Kohomologie rozmaitości algebraicznych

Niezliczone zastosowania teorii kohomologii singularnych w topologii od dawna zachęcały matematyków do prób znalezienia odpowiednika tej teorii w świecie geometrii algebraicznej. W słynnym artykule [We] A. Weil wykazał, że samo istnienie teorii mającej pewne formalne własności znane z topologii algebraicznej nakładałoby bardzo silne ograniczenia na liczbę rozwiązań równań algebraicznych nad $\mathbf{F}_{q^k}$ (są to hipotezy Weila). Rozumowanie Weila oparte jest na prostej obserwacji: rozważmy zbiór rozwiązań równania nad algebraicznym domknięciem $\overline{\mathbf{F}}_q$. Punkty, które są rozwiązaniami nad $\mathbf{F}_{q^k}$ są punktami stałymi działania $k$-tej potęgi automorfizmu Frobeniusa. Na mocy formuły Lefschetza (jeśli uda się ją dowieść) ich liczba $n_k$ jest równa śladowi potęgi automorfizmu Frobeniusa działającego na kohomologiach. Wynika stąd na przykład, że pewna liczba początkowych wartości $n_k$ determinuje cały ich ciąg.

Naszkicujemy teraz pochodzącą od Grothendiecka i jego szkoły konstrukcję kohomologii étalnych, które pozwoliły P. Deligne'owi udowodnić hipotezy Weila.

W sytuacji gdy rozmaitość algebraiczna $X$ jest zdefinowana nad $\mathbf{C}$ cennym narzędziem są kohomologie o współczynnikach w snopach. W szczególności kohomologie o współczynnikach w snopie stałym są izomorficzne z kohomologiami singularnymi $X$ traktowanego jako rozmaitość topologiczna. Jednakże gdy rozpatrujemy rozmaitości określone nad dowolnym ciałem to jedyną topologią jaką rozporządzamy jest topologia Zariskiego. Topologia ta jest zdecydowanie zbyt uboga dla potrzeb homologicznych (np. kohomologie o współczynnikach w snopie stałym względem topologii Zariskiego są trywialne). Genialnym pomysłem Grothendiecka, który pozwolił przenieść teorię kohomologii snopowych na tę sytuację było radykalne uogólnienie pojęcia topologii. Czym bowiem, abstrakcyjnie rzecz biorąc, jest wprowadzenie na pewnym zbiorze $X$ topologii? Jest to wybór rodziny podzbiorów (które nazywamy podzbiorami otwartymi) zamkniętej ze względu na pewne naturalne operacje (sumy i skończone przecięcia). Aby rozwinąc teorię snopów należy także wyróżnić podrodziny $\{f_i : U_i \hookrightarrow X\}_{i\in I}$ stanowiące pokrycia $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Klasa pokryć powinna spełniać pewien naturalny zestaw aksjomatów. Pojęcie topologii i pokrycia otwartego można uogólnić na dowolną kategorię (zamiast kategorii zbiorów). Otóż topologią Grothendiecka na obiekcie $X$ kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy dowolną rodzinę morfizmów $\{f_i : U_i \to X\}_{i\in I}$ zamkniętą ze względu na odpowiednie operacje. Podobnie aksjomatycznie możemy określić klasę pokryć otwartych $X$. Główną praktyczną różnicą w stosunku do topologii w sensie tradycyjnym jest to, że dopuszczamy teraz, iż morfizmy definiujące topologie nie muszą być monomorfizmami ($f_i$ nie musi być włożeniem). Tak właśnie się dzieje w przypadku topologii, która odegrała jak dotąd największą rolę w geometrii algebraicznej, a mianowicie topologii étalnej. W topologii tej określonej na kategorii zbiorów algebraicznych[2] nad ciałem $\mathbf{F}$, jako $f_i$ bierzemy wszystkie otwarte morfizmy étalne tzn. takie które indukują izomorfizmy na przestrzeniach stycznych we wszystkich punktach[3]. Takimi morfizmami (dla $\mathbf{F} = \mathbf{C}$) są np. nakrycia algebraiczne, które oczywiście nie muszą być monomorfizmami. Inną osobliwością topologii étalnej jest istnienie nietrywialnych pokryć otwartych przestrzeni jednopunktowej w sytuacji gdy $\mathbf{F}$ nie jest rozdzielczo domknięte. Przypomnijmy, że punkt jest to taka rozmaitość, na której pierścień funkcji regularnych jest równy $\mathbf{F}$. Punkt jest oznaczany przez $spec(\mathbf{F})$. Rozszerzenie ciał $\mathbf{F} \subset \mathbf{F}'$ zadaje przekształcenie $spec(\mathbf{F}') \to spec(\mathbf{F})$. W takiej sytuacji każde rozszerzenie rozdzielcze $\mathbf{F} \subset \mathbf{F}'$ prowadzi do morfizmu étalnego $spec(\mathbf{F}') \to spec(\mathbf{F})$. Wybór najodpowiedniejszej topologii Grothendiecka do danego zagadnienia stanowi istotny element w rozważaniach Voevodskiego. Wracając zaś do topologii étalnej to okazało się, że teoria kohomologii zbudowana przy pomocy tej topologii[4] ma własności, które postulował Weil. Posługując się nimi Deligne udowodnił na początku lat siedemdziesiątych hipotezy Weila.

Kolejnego impulsu do poszukiwań teorii kohomologii rozmaitości algebraicznych dostarczyła algebraiczna K–teoria. Dziedzina ta rozwija się na pograniczu algebry, teorii homotopii i geometrii algebraicznej. Jej podstawy stworzył w latach 50–ych Grothendieck, lecz za jej głównego architekta uważa się D. Quillena. Zdefiniował on dla dowolnego pierścienia $R$ grupy abelowe $\mathrm{K}_n(R)$ (dla $n = 0, 1, 2, \ldots$) nazywane algebraiczną K–teorią pierścienia $R$. Są to grupy homotopii pewnej przestrzeni topologicznej $BGL_\infty(R)^+$ związanej z grupą macierzy odwracalnych o współczynnikach w $R$. Definicję K–teorii można rozszerzyć na kategorię rozmaitości algebraicznych (ściślej — schematów). Obliczenie K–teorii, nawet gdy mamy do czynienia z ciałem jest niezmiernie trudne, a K–teoria liczb całkowitych jest związana z grupami homotopii sfer. Istotne jest, że algebraiczna K–teoria ma swój znacznie lepiej zbadany topologiczny odpowiednik, topologiczną K–teorię, obliczalną przy użyciu kohomologii singu-

[2] Ściślej mówiąc rozważamy kategorię schematów skończonego typu.

[3] Jeśli zbiór algebraiczny nie jest gładki, to definicja morfizmu étalnego jest nieco bardziej skomplikowana.

[4] Standardowym podręcznikiem zawierającym wykład kohomologii étalnych jest książka J. S. Milne'a [Me].

larnych i algebraicznego narzędzia — ciągu spektralnego Atiyah–Hirzebrucha. Przez analogię z tą sytuacją zaczęto poszukiwać teorii kohomologii rozmaitości algebraicznych, która byłaby związana z algebraiczną K–teorią w podobny sposób. Szybko okazało się, że kohomologie étalne nie nadają się do tego celu. Również wiele innych ważnych niezmienników rozmaitości algebraicznych (jak np. grupy Chow) nie daje się opisać za pomocą kohomologii étalnych. Grothendieck wierzył jednak, że w świecie geometrii algebraicznej istnieje teoria kohomologii zawierająca informacje o wszystkich homologicznych niezmiennikach rozmaitości. Sądził, że kategorię rozmaitości algebraicznych można „zabelianizować". Podejrzewał istnienie kategorii *motywów* $\mathcal{M}(\mathbf{F})$ mającej pewne uniwersalne własności. Poniższe postulaty można znaleźć m.in. w pracach S. Blocha.

- $\mathcal{M}(\mathbf{F})$ jest kategorią abelową (tzn. dopuszczalne są w niej takie operacje jak w kategorii grup abelowych).
- Każdej rozmaitości algebraicznej $X$ odpowiada pewien motyw (obiekt w kategorii motywów[5]) $h(X)$. Przyporządkowanie
$$h : \mathsf{Var}(\mathbf{F}) \to \mathcal{M}(\mathbf{F})$$
jest funktorialne.
- Każda teoria kohomologii $\mathrm{E}^*(X)$ określona dla rozmaitości algebraicznych może być obliczona metodami algebry homologicznej w $\mathcal{M}(\mathbf{F})$. Dokładniej mówiąc $\mathrm{E}^*(X)$ wyraża się jako $Ext^*_{\mathcal{M}(\mathbf{F})}(h(X), \underline{E})$ dla pewnego obiektu $\underline{E}$ w $\mathcal{M}(\mathbf{F})$.
- Szczególną rolę odgrywają kohomologie motywiczne $\mathrm{H}^*_{\mathcal{M}}(X)$. Istnieją ciągi spektralne pozwalające obliczyć $\mathrm{E}^*(X)$ za pomocą $\mathrm{H}^*_{\mathcal{M}}(X)$ i $\mathrm{E}^*(pt)$.

Z kohomologii motywicznych powinno dać się odczytać topologiczne kohomologie przestrzeni (gdy $\mathbf{F} = \mathbf{C}$), jakobian rozmaitości — obiekt parametryzujący wiązki liniowe, grupy Chow (grupy generowane przez cykle algebraiczne), a co najważniejsze — K–teorię. Mimo wielu prób nie udało się w pełni zrealizować tego programu[6]. Andrei Suslin zaproponował podejście do kohomologii motywicznych opierające się na ideach w bardziej bezpośredni sposób zaczerpniętych z topologii algebraicznej. Podejście to rozbudowane przez Voevodskiego opiszemy w następnym rozdziale.

# 2 $\mathbf{A}^1$–teoria homotopii

Nowe podejście do problemu konstrukcji teorii kohomologii rozmaitości algebraicznych Suslin przedstawił w wystąpieniu na konferencji w Luminy w 1987 r.

[5] Mówiąc dokładniej: rozmaitościom, które nie są gładkie i zupełne odpowiadają kompleksy obiektów z $\mathcal{M}(\mathbf{F})$.

[6] W świecie topologii stabilna kategoria homotopijna $\mathsf{SHo}$ może być uważana za odpowiednik kategorii motywów. Wprawdzie nie jest to kategoria abelowa, lecz tzw. kategoria z trójkątami.

Mówiąc w wielkim skrócie Suslin skonstruował ,,motywiczne kompleksy", które są w świecie geometrii algebraicznej analogiem kompleksu singularnego $C_*(X)$ przestrzeni topologicznej $X$. Pierwsze prace Voevodskiego (począwszy od [SV]) były rozwinięciem idei Suslina. Później jednak zaczął stopniowo zastępować metody homologiczne homotopijnymi. Ostatecznie jego praca przybrała postać systematycznie rozwijanej teorii homotopii rozmaitości algebraicznych, którą nazwał $\mathbf{A}^1$–teorią homotopii. Konstrukcję Voevodskiego można rozłożyć na następujące kroki:

- Rozszerzenie kategorii rozmaitości algebraicznych, w sposób umożliwiający takie konstrukcje jak: ilorazy $X/Y$ dla $Y \subset X$, ilorazy przez wyznaczone działanie grupy czy innego typu granice kategoryjne;
- Wprowadzenie pojęcia homotopijnej równoważności;
- Zdefiniowanie stabilnej teorii homotopii;
- Konstrukcja odpowiedników przestrzeni Eilenberga–MacLane'a.

W dalszej części tego rozdziału opiszemy najważniejsze etapy tej konstrukcji (więcej szczegółów czytelnik może znaleźć w przystępnie napisanym artykule [V3]).

Aby zrozumieć konieczność abstrakcyjnych konstrukcji Voevodskiego zastanówmy się najpierw dlaczego nie można rozwijać teorii homotopii w świecie geometrii w sposób naiwny. Większość standardowych konstrukcji topologii algebraicznej takich jak zawieszenie przestrzeni czy doklejanie komórek nie jest wykonalne. Kategoria zbiorów algebraicznych jest na to zbyt sztywna. Bardzo rzadko istnieją w niej granice systemów prostych lub odwrotnych. Voevodsky (opierając się na pomyśle Grothendiecka) zaproponował czysto formalną procedurę dołączania do kategorii granic systemów prostych i odwrotnych. Otóż na mocy lematu Yonedy kategorię rozmaitości algebraicznych $\mathsf{Var}(\mathbf{F})$ można zanurzyć w kategorię funktorów kontrawariantnych $\mathsf{Var}(\mathbf{F}) \to \mathsf{Zbiory}$. Rozmaitości $X$ odpowiada funktor reprezentowalny $U \mapsto \mathrm{Map}_{\mathsf{Var}(\mathbf{F})}(U, X)$. W kategorii funktorów istnieją wszystkie możliwe granice, lecz jest ona zbyt duża. Rozwiązanie zaproponowane przez Voevodskiego polegało na ograniczeniu się do kategorii $\mathsf{Sh}_T(\mathbf{F})$ składającej się z funktorów kontrawariantnych (z $\mathsf{Var}(\mathbf{F})$ do zbiorów) będących snopami. Funktor jest snopem gdy wartość funktora na pokryciu zbioru determinuje wartość funktora na całym zbiorze. Pojęcie snopa wymaga wyboru rodziny dopuszczalnych pokryć, t.j. pewnej topologii Grothendiecka $T$. Kategoria $\mathsf{Sh}_T(\mathbf{F})$ również posiada wszystkie granice, ale przejście $\mathsf{Var}(\mathbf{F}) \to \mathsf{Sh}_T(\mathbf{F})$ zachowuje dodatkowo pewną informację geometryczną. Voevodsky przyjął jako swoją roboczą kategorię właśnie $\mathsf{Sh}_T(\mathbf{F})$ dla odpowiednio dobranej topologii $T$. Po pewnych wahanich wybrał jako $T$ topologię Nisnevicha, która jest nieco uboższa od topologii étalnej. Pokrycia w topologii Nisnevicha buduje się z morfizmów étalnych $\{f_i : U_i \to X\}_{i \in I}$, które spełniają warunek: dla każdej nierozkładalnej rozmaitości $V \subset X$ istnieje indeks $i \in I$ oraz podzbiór $W \subset U_i$ taki, że $f_i$ zadaje izomorfizm ciał funkcji wymiernych $\mathbf{F}(V)$ i $\mathbf{F}(W)$. To eliminuje charakterystyczne dla topologii étalnej nietrywialne pokrycia $\mathit{spec}(\mathbf{F})$.

Każde pokrycie $spec(\mathbf{F})$ można „rozdrobnić” do $\{id : spec(\mathbf{F}) \to spec(\mathbf{F})\}$. Porównywanie topologii étalnej i Nisnevicha odgrywa kluczową rolę w dowodzie hipotezy Milnora.

Tak więc areną teorii Voevodskiego jest kategoria snopów w topologii Nisnevicha, którą będziemy odtąd nazywać po prostu kategorią przestrzeni i oznaczać $\mathsf{Sp}(\mathbf{F})$. Voevodsky uważa tę kategorię za optymalne rozszerzenie kategorii rozmaitości algebraicznych. Dzięki istnieniu granic w $\mathsf{Sp}(\mathbf{F})$ możemy wykonywać wszystkie konstrukcje odgrywające istotną rolę w topologii. I tak, przede wszystkim dla dowolnego zanurzenia $Y \subset X$ możemy zdefiniować iloraz $X/Y$. A zatem dla dowolnej pary przestrzeni z wyróżnionymi punktami $(X, x_0), (Y, y_0)$ możemy określić ich zredukowany produkt (*smash*) jako $X \wedge Y := X \times Y/(X \times y_0 \cup x_0 \times Y)$. Próba zdefiniowania innego kluczowego obiektu w topologii — zawieszenia przestrzeni $\Sigma X$ natrafia na nieoczekiwany problem. Przypomnijmy, że $\Sigma X = S^1 \wedge X$. Jednakże w kategorii $\mathsf{Sp}(\mathbf{F})$ mamy aż dwie kandydatury na okrąg. Niech $\mathbf{A}^1$ będzie prostą afiniczną. Zarówno okrąg „symplicjalny ” $S^1_s := \mathbf{A}^1/\{0,1\}$ jak i okrąg Tate'a $S^1_t := \mathbf{A}^1 - \{0\}$ można interpretować jako odpowiednik topologicznego okręgu $S^1$. Okaże się, że te dwa okręgi nie są nawet homotopijnie równoważne (w sensie wprowadzonej wkrótce relacji). Zjawisko to ma głęboki wpływ na całą teorię.

Kolejnym ważnym krokiem jaki wykonał Voevodsky było wprowadzenie w kategorii $\mathsf{Sp}(\mathbf{F})$ pojęcia homotopii. Mówiąc ściślej, będziemy chcieli zdefiniować kategorię $\mathsf{Ho}(\mathbf{F})$, która ma te same obiekty co $\mathsf{Sp}(\mathbf{F})$, ale utożsamiamy w niej morfizmy homotopijne. Istnieją dwie standardowe procedury pozwalające osiągnąć ten cel. Najprostsze podejście polegałoby na wprowadzeniu relacji homotopii morfizmów i utożsamieniu morfizmów homotopijnych. Jednak lepsze własności ma mniej bezpośrednia konstrukcja. Kategoria homotopijna jest wyznaczona przez klasę homotopijnych równoważności $W$. Może być ona otrzymana z wyjściowej kategorii przez formalne dołączenie odwrotności homotopijnych równoważności (procedura ta przypomina konstrukcję pierścienia ułamków). Tę właśnie drogę wybierzemy. Musimy zatem powiedzieć które morfizmy w $\mathsf{Sp}(\mathbf{F})$ uznajemy za homotopijne równoważności. Nasza klasa $W$ będzie najmniejszą klasą morfizmów w $\mathsf{Sp}(\mathbf{F})$ zawierającą izomorfizmy, rzutowania $\mathbf{A}^1 \times X \to X$, oraz zamkniętą ze względu na pewne konstrukcje kategoryjne[7]. Zgodnie z opisaną przed chwilą ogólną konstrukcją przyjmujemy jako kategorię homotopijną $\mathsf{Ho}(\mathbf{F})$, kategorię powstałą z $\mathsf{Sp}(\mathbf{F})$ przez formalne odwrócenie homotopijnych równoważności. Teraz oczywiście na mocy samej definicji w kategorii $\mathsf{Ho}(\mathbf{F})$ rzutowanie $X \times \mathbf{A}^1 \to X$ jest izomorfizmem (stąd nazwa teorii). Zatem wszystkie morfizmy $f_c : X \to X \times \mathbf{A}^1$ określone formułami $f_c(x) = (x, c)$ są homotopijne (tzn. równe w $\mathsf{Ho}(\mathbf{F})$). Oto kilka dalszych przykładów homotopijnych równoważności (czyli izomorfizmów w $\mathsf{Ho}(\mathbf{F})$): prosta rzutowa $\mathbf{P}^1 \sim \mathbf{A}^1/(\mathbf{A}^1 - \{0\}) \sim S^1_s \wedge S^1_t$. Na koniec podkreślmy, że $S^1_s$ i $S^1_t$ nie są homotopijnie równoważne.

[7] Aby ściśle zdefiniowac klasę $W$ Voevodsky używa pojęcia „zamkniętej kategorii modeli”, które zostało wprowadzone przez Quillena.

# 3 Kohomologie motywiczne

Centralnym punktem teorii Voevodskiego, jest konstrukcja teorii będącej odpowiednikiem teorii kohomologii singularnych w topologii. Konstrukcję tę wykonamy metodami $\mathbf{A}^1$–teorii homotopii. Przypomnijmy najpierw jak w klasycznej sytuacji topologicznej grupy kohomologii wyrażają się w terminach teorii homotopii. Dla dostatecznie regularnej przestrzeni $X$ grupa $\mathrm{H}^n(X,\mathbf{Z})$ może być utożsamiona ze zbiorem klas homotopii odwzorowań z $X$ w przestrzeń Eilenberga–MacLane'a $K(\mathbf{Z},n)$[8], tzn.

$$\mathrm{H}^n(X,\mathbf{Z}) = \mathrm{Map}_{\mathsf{Ho(Top)}}(X, K(\mathbf{Z},n)).$$

Istotą homotopijnego podejścia Voevodskiego do kohomologii motywicznych było właśnie znalezienie algebraicznego odpowiednika przestrzeni $K(\mathbf{Z},n)$. Wskazówki dostarczyło tutaj klasyczne twierdzenie Dolda–Kana, które mówi, że $K(\mathbf{Z},n)$ jest homotopijnie równoważne z $\mathbf{Z}[S^n]$, gdzie $\mathbf{Z}[X]$ oznacza wolną topologiczną grupę abelową rozpiętą na przestrzeni $X$.

Stoją przed nami dwa zadania: po pierwsze musimy znaleźć algebraiczny odpowiednik sfery, po drugie zaś zrozumieć czym powinna być "wolna grupa abelowa" w naszym kontekście. Pierwszy problem wydaje się być prosty ponieważ $S^n$ jest po prostu $n$–krotnym zredukowanym produktem $S^1$ ze sobą. Przypomnjmy jednak, że w naszej kategorii $\mathsf{Sp}(\mathbf{F})$ istnieją dwa rodzaje okręgów. Dlatego rozważać musimy "motywiczną sferę" $S^{p,q} := (S^1_s)^{\wedge p-q} \wedge (S^1_t)^{\wedge q}$. Pierwszy indeks jest wymiarem algebraicznym, drugi tzw. skrętem Tate'a. Z przyczyn technicznych Voevodsky zdecydował się użyć do konstrukcji przestrzeni Eilenberga–MacLane'a sfery $S^{2n,n} \simeq (\mathbf{P}^1)^{\wedge n}$.

Przypomnijmy, że elementami $\mathbf{Z}[X]$ są formalne kombinacje liniowe $\sum a_i x_i$, gdzie $a_i \in \mathbf{Z}$, $x_i \in X$. Spróbujmy teraz przenieść tę konstrukcję do kategorii rozmaitości algebraicznych. Voevodsky oznacza ją przez $L(X)$. Otrzymujemy obiekt kategorii $\mathsf{Sp}(\mathbf{F})$, czyli funktor $L(X) : \mathsf{Var}(\mathbf{F}) \to \mathsf{Zbiory}$ będący snopem w topologii Nisnevicha. Jego wartością na rozmaitości $U$ jest grupa formalnych kombinacji punktów $X$ parametryzowanych przez $U$. Zadaje ona więc pewien podzbiór produktu $U \times X$, który możemy rozłożyć na formalną kombinację nieredukowalnych podzbiorów $U \times X$. Innymi słowy element $L(X)(U)$ jest cyklem algebraicznym w produkcie $U \times X$. Ponadto każda składowa otrzymanego cyklu rzutuje sie suriektywnie na $U$, a włókna rzutu są skończone. Zatem jako wolną grupę abelową rozpiętą na rozmaitości $X$ przyjmujemy funktor, który okazuje się być snopem w topologii Nisnevicha:

$$L(X) : U \mapsto cor(U,X)\,,$$

gdzie $cor(U,X)$ oznacza wolną grupę abelową rozpiętą na zbiorze nieredukowalnych podzbiorów $U \times X$, które dominują i są skończone nad $U$ (grupa ta

[8] Przestrzeń Eilenberga-MacLane'a jest to przestrzeń, która ma trywialne wszystkie grupy homotopii oprócz $\pi_n(K(\mathbf{Z},n)) = \mathbf{Z}$. Ostrzegamy czytelnika, że przestrzeń Eilenbega–MacLane'a $K(\mathbf{Z},n)$ nie powinna być mylona z grupami K–teorii liczb całkowitych $\mathrm{K}_n(\mathbf{Z})$.

bywa nazywana grupą korespondencji z $U$ w $X$). Definicję przestrzeni $L$ rozszerzamy na przypadek ilorazów rozmaitości algebraicznych kladąc $L(X/Y) := L(X)/L(Y)$. Teraz już możemy zakończyć konstrukcję przestrzeni Eilenberga–MacLane'a przyjmując $K(\mathbf{Z}(n), 2n) = L(S^{2n,n})$. Mając zdefiniowne przestrzenie Eilenberga–MacLane'a możemy określić dla dowolnego $X \in \mathsf{Sp}(\mathbf{F})$ (dla ciała $\mathbf{F}$ charakterystyki zero[9]) jego motywiczne grupy kohomologii:

$$\mathrm{H}^{2n-m,n}(X;\mathbf{Z}) = \mathrm{Map}_{\mathsf{Ho}(\mathbf{F})}((S^1_s)^{\wedge m} \wedge X, K(\mathbf{Z}(n), 2n)) .$$

Gdybyśmy ograniczyli się w powyższej definicji do $m = 0$ to otrzymalibyśmy formułę znaną z topologii. Obecność tego dodatkowego parametru wynika z istnienia w naszej sytuacji dwóch rodzajów okręgów. Wiele światła na tę formułę rzuca zinterpretowanie jej w terminach ,,stabilnej teorii homotopii", co czyni Voevodsky np. w [V3]. Ten bardziej wyrafinowany język pozwala również podać poprawną definicję kohomologii motywicznych dla ciała dowolnej charakterystyki.

Na zakończenie należy wspomnieć, że alternatywne konstrukcje kohomologii motywicznych zostały podane przez M. Levine'a i M. Hanamurę. Nie jest jasne czy te teorie są izomorficzne z kohomologiami Voevodskiego. Natomiast udało się udowodnić, że dla gładkich rozmaitości kohomologie Voevodskiego są izomorficzne z wyższymi grupami Chow, które zostały zdefiniowane przez Blocha w latach osiemdziesiątych. Trzeba niemniej podkreślić, że wszystkie te konkurencyjne teorie mają znacznie gorsze własności formalne, oraz że dopiero teoria Voevodskiego przyniosła wartościowe zastosowania.

# 4 Hipoteza Milnora

Dowód hipotezy Milnora zaprezentowany w [V2] jest skomplikowany i przedstawienie go choćby w zarysie wykracza poza ramy naszego artykułu. Cele jakie sobie postawiliśmy są znacznie skromniejsze. Zaczniemy od elementarnego zdefiniowania $K$–teorii Milnora i sformułowania hipotezy. Następnie zaś, aby czytelnik miał możliwość poczucia prawdziwego jej sensu, opiszemy ją w szczególnych przypadkach. Na koniec naszkicujemy pewne idee dowodu.

Hipoteza Milnora była sformułowana w 1970 r. w pracy [Mi] dotyczącej form kwadratowych. Milnor zdefiniował grupy $\mathrm{K}^M_n(\mathbf{F})$ (dla $n = 0, 1, 2 \ldots$) dla dowolnego ciała $\mathbf{F}$ nazwane później K–teorią Milnora. Jest to teoria ściśle związana z algebraiczną K–teorią o której wspomnieliśmy w rozdziale 2, wprawdzie znacznie od niej uboższa, ale też łatwiejsza do obliczenia. Hipoteza Milnora mówi, że jeśli charakterystyka $\mathbf{F}$ jest różna od dwóch, to $\mathrm{K}^M_n(\mathbf{F})/2\mathrm{K}^M_n(\mathbf{F}) = \mathrm{K}^M_n(\mathbf{F}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/2$ jest izomorficzne z kohomologiami Galois $\mathrm{H}^n(\mathbf{F}; \mathbf{Z}/2)$. Za chwilę opiszemy powyższe grupy.

Niech $\mathbf{F}^* = \mathbf{F} \setminus \{0\}$ będzie grupą multiplikatywną ciała. Iloczyn tensorowy $\overbrace{\mathbf{F}^* \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}^*}^{n}$ dzielimy przez podgrupę generowaną przez tensory

[9] W charakterystyce dodatniej definicja wymaga pewnych technicznych modyfikacji; [V3].

proste postaci $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$ takie, że $a_i + a_{i+1} = 1$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Wówczas $\mathrm{K}_*^M(\mathbf{F}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{K}_n^M(\mathbf{F})$ jest pierścieniem przemiennym z gradacją. Opisuje on pewne arytmetyczne właściwości ciała. Dla przykładu: liczba $-1$ jest sumą kwadratów w $\mathbf{F}$ wtedy i tylko wtedy, gdy element $-1 \in \mathbf{F}^* = \mathrm{K}_1^M(\mathbf{F})$ jest nilpotentny w $\mathrm{K}_*^M(\mathbf{F})$. Grupy Milnora są zdefiniowane jawną formułą i niosą ważne informacje o ciele $\mathbf{F}$. Nie jest łatwo jednak umieścić je w szerszym kontekście np. rozszerzyć do teorii obejmującej rozmaitości algebraiczne. Natomiast kohomologie Galois, czyli grupy kohomologii grupy Galois rozdzielczego domknięcia ciała $\mathbf{F}$ są standardowymi obiektami algebry homologicznej (choć trudno podać równie elementarną ich definicję jak w przypadku K–teorii Milnora). Ponadto kohomologie Galois można zinterpretować jako kohomologie étalne punktu $H^*_{\acute{e}t}(spec(\mathbf{F}); \mathbf{Z}/2)$. Hipoteza Milnora opisuje związki pomiędzy własnościami arytmetycznymi ciała $\mathbf{F}$ wyrażonymi przez $\mathrm{K}_*^M(\mathbf{F})$ z własnościami kohomologicznymi grupy Galois.

Hipoteza Milnora ma naturalne uogólnienie nazywane hipotezą Blocha–Kato. Mówi ona, że jeśli $\ell$ jest liczbą pierwszą różną od charakterystyki ciała, to

$$\mathrm{K}_n^M(\mathbf{F}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/\ell \simeq \mathrm{H}^n(\mathbf{F}; \mu_\ell^{\otimes n}),$$

gdzie prawa strona oznacza kohomologie Galois ze współczynnikami w $n$–tej potędze tensorowej grupy pierwiastków z jedynki stopnia $\ell$. Kohomologie Galois są izomorficzne z $\mathrm{H}^n_{\acute{e}t}(spec(\mathbf{F}); \mu_\ell^{\otimes n})$.

Aby wyjaśnić jakie zjawisko opisuje hipoteza Milnora i Blocha–Kato przyjrzyjmy się bliżej przypadkom $n = 1$ i $n = 2$. Będziemy zakładać, że $\mathrm{char}(\mathbf{F}) \neq \ell$ i wszystkie pierwiastki z jedynki stopnia $\ell$ należą do ciała $\mathbf{F}$. Niech $n = 1$. Niezerowe elementy $\mathrm{H}^1(\mathbf{F}; \mu_\ell) = \mathrm{H}^1(\mathbf{F}; \mathbf{Z}/\ell)$ odpowiadają cyklicznym rozszerzeniom stopnia $\ell$ ciała $\mathbf{F}$. Przypominamy, że rozszerzenie $\mathbf{F} \subset \mathbf{F}'$ jest cykliczne, gdy jest rozszerzeniem Galois oraz grupa Galois $Gal(\mathbf{F}' : \mathbf{F})$ jest cykliczna. Z drugiej strony $\mathrm{K}_1^M(\mathbf{F}) \otimes \mathbf{Z}/\ell = \mathbf{F}^*/(\mathbf{F}^*)^\ell$ jest opisane przez elementy odwracalne ciała $\mathbf{F}$. Hipoteza Blocha–Kato sprowadza się więc do twierdzenia mówiącego, że każde rozszerzenie cykliczne stopnia $\ell$ jest rozszerzeniem pojedynczym $\mathbf{F}(a)$, gdzie $a$ spełnia równanie $a^\ell = b$ dla pewnego $b \in \mathbf{F}$. Jest to dobrze znane twierdzenie Lagrange'a.

Niech teraz $n = 2$. Tak jak poprzednio zakładamy, że wszystkie pierwiastki z jedynki stopnia $\ell$ należą do $\mathbf{F}$ oraz $\ell \neq \mathrm{char}(\mathbf{F})$. Kohomologie Galois w tym przypadku mają następującą interpretację: niezerowe elementy $\mathrm{H}^2(\mathbf{F}; \ell)$ parametryzują algebry nad ciałem $\mathbf{F}$ które są:

- centralne (centrum jest równe $\mathbf{F}$),
- proste (nie mają niezerowych ideałow właściwych),
- rangi $\ell$ (maksymalne ciało zawarte w algebrze jest rozszerzeniem stopnia $\ell$ nad centrum).

Ważnym przykładem jest uogólniona algebra kwaternionowa. Jest ona zdefiniowana następująco. Niech $a$ i $b$ będą elementami odwracalnymi $\mathbf{F}$. Definiujemy algebrę nieprzemienną $\mathbf{F}\{x, y\}$ generowaną przez dwa symbole $x$ i $y$ spełniające tożsamości: $x^\ell = a$, $y^\ell = b$ i $xy = \xi_\ell yx$, gdzie $\xi_\ell$ jest pierwiastkiem z jedynki stopnia $\ell$. Dwie algebry $A$ i $B$ uważamy za równoważne jeśli algebry macierzy $M(m\times m;A)$ i $M(n\times n;B)$ są izomorficzne dla pewnych $m$ i $n$ (jest to równoważność Brauera). Z drugiej strony elementy K–teorii są reprezentowane przez kombinacje liniowe symboli postaci $a\otimes b$, gdzie $a,b\in \mathbf{F}^*$. Hipoteza Blocha–Kato dla $n=2$ mówi, że każda prosta algebra centralna rangi $\ell$ jest równoważna iloczynowi tensorowemu uogólnionych algebr kwaternionowych. Kombinacja liniowa tensorów $a_i\otimes b_i$ odpowiada tu iloczynowi tensorowemu algebr kwaternionowych skonstruowanych za pomocą par $\{a_i,b_i\}$. Hipoteza Blocha-Kato dla $n=2$ została udowodniona przez Merkuriewa i Suslina w 1983.

Powyższe przykłady dobrze oddają sens hipotez Milnora i Blocha–Kato. Można o nich myśleć w taki sposób: pewne obiekty zdefiniowane za pomocą rozszerzeń ciała $\mathbf{F}$ mogą być opisane bardziej konkretnie za pomocą elementów $\mathbf{F}$.

Podejście Voevodskiego do hipotez Milnora i Blocha–Kato można najkrócej naszkicować następująco. Zaczął on od zinterpretowania K–teorii Milnora w terminach kohomologii motywicznych. Otóż okazuje się, że $\mathrm{K}^M_n(\mathbf{F})\otimes \mathbf{Z}/\ell = \mathrm{H}^{n,n}(spec(\mathbf{F});\mathbf{Z}/\ell)$. Z drugiej zaś strony jeśli całą konstrukcję kohomologii motywicznych powtórzymy stosując zamiast topologii Nisnevicha bogatszą od niej topologię étalną to otrzymamy motywiczne kohomologie étalne $\mathrm{H}^{p,q}_{ét}(spec(\mathbf{F}),\mathbf{Z}/\ell)$. Ponadto $\mathrm{H}^{n,n}_{ét}(spec(\mathbf{F});\mathbf{Z}/\ell) = \mathrm{H}^n_{ét}(Spec(\mathbf{F});\mu_\ell^{\otimes n}) = \mathrm{H}^n(\mathbf{F};\mu_\ell^{\otimes n})$. Tak wiec udało się uzyskać obie grupy jako wynik zastosowania bardzo podobnych konstrukcji, co ułatwia ich porównanie. Następnie dzięki dobrym funktorialnym własnościom obu wersji kohomologii motywicznych (rozmaitym ciągom dokładnym itd.) zagadnienie wykazania izomorfizmu zostaje sprowadzone do pokazania znikania pewnych grup étalnych kohomologii motywicznych, mianowicie:

$$\mathrm{H}^{n+1,n}_{ét}(spec(\mathbf{F});\mathbf{Z}_{(l)}) = 0\,.$$

(Współczynnikami są tu liczby $\ell$-adyczne.) Voevodsky nazywa tę formułę „90–tym twierdzeniem Hilberta", ponieważ w szczególnym przypadku $\mathrm{H}^{2,1}_{ét}(spec(\mathbf{F});\mathbf{Z}) = \mathrm{H}^1(\mathbf{F};\overline{\mathbf{F}}^*_s)$ sprowadza się ona do znanego twierdzenia Hilberta przełożonego na współczesny język[10]. Wykazanie znikania $\mathrm{H}^{n+1,n}_{ét}(spec(\mathbf{F});\mathbf{Z}_{(l)})$ jest jądrem dowodu. Opiera się on na istnieniu pewnych rozmaitości o szczególnych własnościach kohomologicznych, tzw. rozmaitości rozkładu. W przypadku $\ell=2$ takie rozmaitości zostały znalezione. Okazały się nimi być kwadryki Pfistera. Tym samym hipoteza Milnora została udowodniona. Dla $\ell>2$ hipoteza do niedawna była otwarta, choć pewne konstrukcje rozmaitości rozkładu były znane w niskich wymiarach. W czerwcu 2003 Voevodsky ([V4]) zaanonsował dowód hipotezy Bloch-Kato opierający się na pewnych rezultatach M. Rosta.

Podsumujmy: dowód hipotezy Milnora, która w swoim sformułowaniu mówi jedynie o ciele $\mathbf{F}$, wymagał nie tylko rozważenia rozszerzeń ciał (co jest

[10]Takie sformułowanie oryginalnego 90–tego twierdzenia Hilberta znane było już Emmie Noether, choć nie posługiwała się ona językiem kohomologii.

składnikiem definicji kohomologii étalnych), lecz także rozbudowania teorii kohomologii obejmującej wszystkie rozmaitości zdefiniowane nad $\mathbf{F}$. Innymi słowy studiowanie arytmetycznych własności ciała doprowadziło do badania całej kategorii schematów nad nim określonych.

Dowód tej hipotezy jest jak dotąd najbardziej spektakularnym zastosowaniem teorii Voevodskiego. Użycie jej z sukcesem do rozwiązania trudnego problemu dotyczącego $K$–teorii uzasadnia w jakiejś mierze tezę, że Voevodskiemu udało się skonstruować poszukiwaną uniwersalną teorię kohomologii.

# Bibliografia


[Fr] Friedlander, Eric: *Motivic complexes of Suslin and Voevodsky. Séminaire Bourbaki 1996/97.* Astérisque, **245** (1997), Exp. No. 833, 5, p. 355–378.

[Ka] Kahn, Bruno: *La conjecture de Milnor (d'après V. Voevodsky). Séminaire Bourbaki 1996/97.* Astérisque, **245** (1997), Exp. No. 834, 5, p. 379–418.

[Me] Milne, James S.: *Étale cohomology..* Princeton Mathematical Series,, no. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1980).

[Mi] Milnor, John: *Algebraic* K*-theory and quadratic forms.* Invent. Math., **9** (1969/1970), p. 318–344.

[SV] Suslin, Andrei; Voevodsky, Vladimir: *Singular homology of abstract algebraic varieties.* Invent. Math., **123** (1996), no. 1, p. 61–94.

[V1] Voevodsky, Vladimir: *A letter to Beilinson.* December 6, 1992, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0033

[V2] Voevodsky, Vladimir: *The Milnor Conjecture.* preprint 1996 http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0170

[V3] Voevodsky, Vladimir: $\mathbf{A}^1$*-homotopy theory.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vol I (Berlin, 1998). Doc. Math. (1998), Extra Vol. I, p. 579–604.

[V4] Voevodsky, Vladimir: *Motivic cohomology with* $\mathbf{Z}/\ell$*–coefficients.* preprint 2003, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0639

[We] Weil, André: *Numbers of solutions of equations in finite fields.* Bull. Amer. Math. Soc., **55** (1949), p. 497–508.



Marcin Chałupnik, Andrzej Weber
Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2, 02–097 Warszawa,
e-mail: mchal@mimuw.edu.pl, aweber@mimuw.edu.pl