

Algebraic Topology I problems

Version 17 January 2014

Problems with ♠ are already done, with L were done on the lecture, with !!! should be done next time

- 1) ♠ A functor $F : C \rightarrow D$ is an equivalence iff
 1. $F : \text{Mor}_C(X_1, X_2) \rightarrow \text{Mor}_D(F(X_1), F(X_2))$ is a bijection for any pair of objects $X_1, X_2 \in \text{Ob}(C)$
 2. Any object $Y \in \text{Ob}(D)$ is isomorphic to the object of the form $F(X)$ for some $X \in \text{Ob}(C)$

Written homework: we have defined the inverse of F , called G by a choice of an isomorphism $f_Y : Y \rightarrow F(X)$. Define a transformation of functors $G \circ F \rightarrow \text{Id}_C$ and check the compatibility of the relevant diagram.
- 2) ♠ [Yoneda1] Given a category C . For $X \in \text{Ob}(C)$ let $h^X(-) = \text{Mor}_C(-, X) \in \text{Func}(C^{op}, S)$. Show that $h_X : C \rightarrow \text{Func}(C, S)$ is a full embedding.
- 3) ♠ [Yoneda2] Given a category C . For $X \in \text{Ob}(C)$ and $F \in \text{Func}(C^{op}, S)$. Show that the map $\text{NatTr}(h^X, F) = \text{Mor}_{\text{Func}(C^{op}, S)}(h^X, F) \rightarrow F(X)$ defined by $\Phi \mapsto \Phi(X)(\text{id}_X)$ is a bijection.
- 4) ♠ A small category C in which for any pair of objects there exists at most one morphism is equivalent to the category defined by a partially ordered set.
- 5) If in a category every morphism is an isomorphism and every two objects are isomorphic, then this category is equivalent to the category defined by a group. (Example: the fundamental groupoid of a topological space.)
- 6) Show that the functor $h^X \times h^Y : C \rightarrow S$ is representable by the cartesian product (if it exists in C).
- 7) L Construct the left adjoint functor to $\text{Hom}(V, -) : \text{Vect}_k \rightarrow \text{Vect}_k$ and the right adjoint if $\dim V < \infty$.
- 8) L Let $F : I \rightarrow C$ be a functor from a small category I (i.e. a diagram in C). Show that $L \in \text{Ob}(C)$ is an inverse limit $\lim_I F$ iff the functor $X \mapsto \lim_I \text{Mor}_C(X, F(-))$ is representable by L .
- 9) What is an analogue of the previous statement for the direct limit $\text{colim}_I F$?
- 10) ♠ Show that if in C there exist equalizers of any pair of morphism and there exist products of any family of objects, then in C exist limits indexed by any category.
- 11) ♠ A functor $G : C \rightarrow D$ which is left adjoint preserves colimits. This means that for any diagram $F : I \rightarrow C$ the natural map $\text{colim}_I G \circ F \rightarrow G(\text{colim}_I F)$ is an isomorphism. (see 9))
- 12) Consider the following obvious functors and check whether there exist right and left adjoint functors:
 - a) Topological Hausdorff spaces $\rightarrow$ Compact spaces
 - b) Topological spaces $\rightarrow$ Sets
 - c) Groups $\rightarrow$ Sets
 - d) Topological groups $\rightarrow$ Topological spaces
 - e) Abelian groups $\rightarrow$ Groups
 - f) R-modules $\rightarrow$ Abelian groups
 - g) ...
- 13) ??? Let $L : C \rightleftarrows D : R$ be a pair of adjoint functors. By adjunction we have natural maps $\tau_X : X \rightarrow RL(X)$ for $X \in \text{Ob}(C)$ and $\sigma_Y : LR(Y) \rightarrow Y$ for $Y \in \text{Ob}(D)$ (in fact transformations of functors). Show that the composition

$$R(Y) \xrightarrow{\tau_{R(Y)}} RL(R(Y)) \xrightarrow{R(\sigma_Y)} R(Y)$$

is the identity. Similarly for the compositions with interchanged roles of functors (see the next exercise).

14) ??? Let $L : C \rightarrow D$ and $R : D \rightarrow C$ be two functors. Suppose that there are given transformation of functors $\sigma : LR \rightarrow Id_D$ and $\tau : Id_C \rightarrow RL$. Composing with L we define transformation of functors:

$$F * \tau : L \rightarrow LRL \quad \text{and} \quad \sigma * L : LRL \rightarrow L.$$

Composing with R we define transformation of functors:

$$\tau * R : R \rightarrow RLR \quad \text{and} \quad R * \sigma : RLR \rightarrow R.$$

Show that if

$$(\sigma * L) \circ (L * \tau) = Id_L \in NatTr(L, L) \quad \text{and} \quad (R * \sigma)(\tau * R) = Id_R \in NatTr(R, R)$$

then L is left adjoint to R .

15) Let R be a commutative ring. Show that there is natural isomorphism of R -modules: $(A \oplus B) \otimes C \simeq (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$.

16) ♠(written) Let $f : R \rightarrow S$ be a ring homomorphism. (Then the ring S is a R -module via f .) For a S module N define a R -module f^*N , which is equal to N as a group with multiplication $r \cdot n = f(r)n$ for $r \in R$. For a R -module M define $f_*M = S \otimes_R M$ with multiplication given by $s_1 \cdot (s_2 \otimes m) = (s_1 s_2) \otimes m$. Show that f_* and f^* are adjoint. Does one have to assume that the rings are commutative?

17) (written) Let (X, A) be a pair of topological spaces. Suppose that there exist a neighbourhood $U \supset A$ and a deformation of U to A in X constant on A (i.e. a homotopy $h_t : U \rightarrow X$ such that $h_0(u) = u$, $h_t(a) = a$, $h_1(u) \in A$ for $t \in [0, 1]$, $u \in U$, $a \in A$) and a continuous function $X \rightarrow [0, 1]$, $f^{-1}(1) = A$, $f|_{X-U} = 0$. Prove that $A \hookrightarrow X$ is a cofibration.

18) ♠Let C be a category. Let $(A, A \rightarrow A \sqcup A)$ be a cogroup object, $(B, B \times B \rightarrow B)$ a group object. Suppose that two group structures on $Mor_C(A, B)$ have the same neutral objects. (If C has an object which is both initial and final then this assumption is satisfied.) Prove that these structures coincide. Moreover the common group structure is abelian.

Hint: show $(a * b) \circ (c * d) = (a \circ c) * (b \circ d)$.

19) ♠Show that the functor defined by the smash product in Top_*

$$F_Y(X) := X \wedge Y = X \times Y / (X \times * \cup * \times Y)$$

is adjoint to $Map_{Top_*}(Y, -)$. (Be careful with topology, assume that Y is locally compact, Z Hausdorff.)

20) ♠Show $S^1 \wedge S^n \simeq S^{n+1}$.

21) ♠Let $X \rightarrow Y$ be a continuous map of topological spaces which is surjective. Show that if it is open or closed, then the topology on Y is a quotient topology. Show an example of a quotient topology which is not open nor closed.

22) ♠Show that 1-point compactification of the Möbius strip is homeomorphic to $\mathbf{RP}^2$.

23) Let X be a topological space which is arc-connected. Let p and q be two points. Assume that $\{p\} \rightarrow X$ and $\{q\} \rightarrow X$ are cofibrations. Show that $(X, \{p\})$ is homotopy equivalent to $(X, \{q\})$, i.e. an isomorphism in $hTop_*$.

24) ♠Suppose $A \hookrightarrow X$ is a cofibration and A is contractible. Then X and X/A are homotopy equivalent.

25) ♠ Show that the empty torus with one disc glued to the meridian (i.e $S^1 \times S^1 \cup D^2 \times \{pt\}$) and $S^2 \vee S^1$ are homotopy equivalent.

26) There exist following homotopy equivalences:

- a) ♠ $S^n/S^k \sim S^n \vee S^{k+1}$
- b) ♠ $(S^n \times S^m)/(S^n \times \{s_0\}) \sim S^{n+m} \vee S^m$
- c) !!! $\Sigma(S^n \times S^m) \sim S^{n+1} \vee S^{m+1} \vee S^{n+m+1}$
- d) !!! $\Sigma P_g \sim S^3 \vee \bigvee_{2g} S^2$, where P_g is a compact surface of genus g .

27) If $X = A \cup B$ where A, B closed subsets and $A \cap B \subset A$ is a Borsuk pair, then $B \subset X$ is a Borsuk pair.

28) ♠ Let $f : A \rightarrow X$ be a map and suppose that X is contractible. Then the cone of the inclusion $CA \cup_f X$ is homotopy equivalent to the suspension.

29) (written) ♠ Let $E \rightarrow B$ be a map and suppose that E is contractible. Then the homotopy fiber $F_b := \{(e, \gamma) \in E \times Map(I, B) : \gamma(0) = f(e), \gamma(1) = b\}$ is homotopy equivalent to the loop space ΩB .

30) ♠ What is the homotopy cofiber of $X \rightarrow pt$?

31) ♠ What is the homotopy fiber of $pt \rightarrow X$?

32) ♠ Let $f : E \rightarrow B$ be a fibration over a path-connected space.

- a) if there exists $b \in B$ such that $f^{-1}(b)$ is path-connected, then E is path connected.
- b) if E is path-connected and B simplyconnected, then the fibres are path-connected.

33) ♠ Find fibrations

- a) $S^0 \hookrightarrow S^1 \twoheadrightarrow S^1$
- b) $S^1 \hookrightarrow S^3 \twoheadrightarrow S^2$
- c) $S^3 \hookrightarrow S^7 \twoheadrightarrow S^4$
- d) $S^7 \hookrightarrow S^{15} \twoheadrightarrow S^8$

34) ♠

- a) Find a fibration $E \rightarrow B$ such that $B \sim \mathbf{RP}^\infty$, $E \sim S^1$, and the fiber is homotopy equivalent to S^1 .
- b) Find a fibration $E \rightarrow B$ such that $B \sim \mathbf{CP}^\infty$, $E \sim S^2$, and the fiber is homotopy equivalent to S^3 .
- c) Find a fibration $E \rightarrow B$ such that $B \sim \mathbf{HP}^\infty$, $E \sim S^4$, and the fiber is homotopy equivalent to S^7 .

35) ♠ Show that a locally trivial fibration is a fibration (in the sense of Hurewicz). (Assume e.g. that the base is paracompact).

36) ♠ Find the homotopy fiber of the map $\mathbf{CP}^\infty \vee \mathbf{CP}^\infty \rightarrow \mathbf{CP}^\infty$ identifying two copies of $\mathbf{CP}^\infty$.

37) Show that the homotopy fiber of $X \vee X \rightarrow X$ is $\Sigma \Omega X$.

(*Technical step:* Let $f : P \rightarrow X$ be a map from a contractible space. Then the push-out of mapping cylinders

$$\left(\begin{array}{ccc} P & \rightarrow & Z(f) \\ \downarrow & & \\ Z(f) & & \end{array} \right) \text{ is homotopy equivalent to } X \vee X.$$

38) ? What is the relation of the fiber inclusion map $\Sigma \Omega X \hookrightarrow X \vee X \twoheadrightarrow X$ with the map $\Sigma \Omega X \rightarrow X$ adjoint to two natural maps $id, inverse : \Omega X \rightarrow \Omega X$.

39) ♠ Suppose that in the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

i, j are cofibrations, f and g are homotopy equivalences. Show that (f, g) is a homotopy equivalence of pairs.

40) If $p : E \rightarrow B$ is a fibration, then for any locally compact space X the natural map $Map(X, E) \rightarrow Map(X, B)$ is a fibration. What can you say about the map $Map(B, X) \rightarrow Map(E, X)$?

41) ♠ Is the following statement true? Suppose that $E_1 \rightarrow B$ and $E_2 \rightarrow B$ are fibrations and E_1 is homotopy equivalent to E_2 . Then there exist a fiberwise homotopy equivalence

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\sim} & E_2 \\ & \searrow \swarrow & \\ & B & \end{array}$$

42) The homotopy coequalizer of two maps $f, g : X \rightarrow Y$ is defined as the push-out

$$\begin{array}{ccc} X \vee X & \xrightarrow{f \vee g} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \wedge I^+ & \longrightarrow & hcoeq(f, g). \end{array}$$

Dually the homotopy equalizer is defined by the pull-back

$$\begin{array}{ccc} Y \times Y & \xleftarrow{f \times g} & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ P(X) & \xleftarrow{} & heq(f, g). \end{array}$$

Consider the circle S^1 as the unit complex numbers. Let $f, g : S^1 \rightarrow S^1$, $f = id$, $g(z) = \bar{z}$. Describe the homotopy coequalizer of f and g . What is the homotopy type of the homotopy equalizer? (??)

43) Let $f : X \rightarrow Y$ be a map of pointed spaces. Compare $C(Sf)$ with $S(Cf)$ and the dual objects involving homotopy fiber and loop spaces.

44) ♠ Compute homotopy groups of surfaces of positive genus.

45) Compute $\pi_n(S^n)$ (♠),

♠ (written) $\pi_3(S^2)$, show $\pi_n(S^3) \simeq \pi_n(S^2)$ for $n > 2$. What are consequences for homotopy groups from Problem 33?

46) ♠ Compute homotopy groups of $\mathbf{RP}^\infty$ and $\mathbf{CP}^\infty$. What do you know about $\pi_i(\mathbf{HP}^\infty)$?

47) ♠ If the homotopy groups of the basis and the fiber are finite, then the homotopy groups of the total space of the fibration are also finite.

48) ♠ If the fibration has a section, then $\pi_n(E) \simeq \pi_n(B) \oplus \pi_n(F)$. (Assumption: F connected, $n > 1$)

49) ♠ If the fiber contracts to a point in E , then $\pi_n(B) \simeq \pi_n(E) \oplus \pi_{n-1}(F)$. (Assumption: $n > 1$.)

50) ♠ Compute homotopy groups π_i of the Stiefel manifold $V_k(\mathbf{R}^n)$ for $i \leq n - k$. (Assumption: $n > 1$.)

51) Whitehead product:

♠ naturality with respect to maps and the action of the fundamental groupoid

♠ $[a, b] = (-1)^{pq}[b, a]$

♠ $[a, \gamma] = a - [h_\gamma(a)]$ for $\gamma \in \pi_1(X)$

*** show the Jacobi rule:

$$(-1)^{pq}[[a, b], c] + (-1)^{qr}[[b, c], a] + (-1)^{rp}[[c, a], b] = 0.$$

- 52) ♠ If A is a retract of X , then $\pi_n(X) \simeq \pi_n(A) \oplus \pi_n(X, A)$
- 53) ♠ If A is contractible in X then $\pi_n(X, A) \simeq \pi_n(X) \oplus \pi_{n-1}(A)$
- 54) ♠ $\pi_n(X \vee Y) \simeq \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \oplus \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y)$
- 55) ♠ Decompose into cells the projective spaces $\mathbf{RP}^n$, $\mathbf{CP}^n$, $\mathbf{HP}^n$
- 56) !!! Decompose the lens space $L(n; k) = \mathbf{CP}^2 / \mathbf{Z}_n$ (action of the generator of $\mathbf{Z}_n$: $[z_1, z_2] \mapsto [\xi z_1, \xi^k z_2]$, where $(n, k) = 1$, ξ is an n -th primitive root of 1.
- 57) !!! Prove that any finite CW-complex can be embedded into an Euclidian space.
- 58) !!! HELP
- A) Let $Y \subset Z$ be a cofibration. Show that two conditions are equivalent:
- $\pi_n(Z, Y) = 0$
 - given a map $f : D^n \rightarrow Z$ and a homotopy $h_t : S^{n-1} \rightarrow Z$ such that $h_0 = f|_{S^{n-1}}$ and $h_1(S^{n-1}) \subset Y$; it is possible to extend the homotopy to $H_t : D^n \rightarrow Z$ in a way that $H_0 = f$ and $H_1(D^n) \subset Y$.
- B) Generalize the statement for any map $Y \rightarrow Z$ instead of an inclusion.
- C) Replace the pair (D^n, S^{n-1}) by any cofibration (X, A) , the condition a) by „ $Y \rightarrow Z$ is an n -equivalence” and show a) $\Rightarrow$ b).
- 59) Whitehead theorem
- A) ♠ Assume that $Y \rightarrow Z$ is an n -equivalence. Show that for a CW-complex X of dimension $\leq n$ the map $[X, Y] \rightarrow [X, Z]$ is surjective. (Use HELP with $A = \emptyset$.)
- B) For $\dim U < n$ the map $[U, Y] \rightarrow [U, Z]$ is injective. (In HELP take $X = U \times I$, $A = U \times \{0, 1\}$, $f =$ homotopy between maps $U \rightarrow Z$, $h_t = h_0$.)
- 60) *** Show that any Lie group G (e.g. $G = U(n)$ or $SO(n)$ if you are not familiar with a general theory) we have $\pi_2(G) = 0$. Hint: assume that G is compact and simply connected and consider the maximal torus T and the exact sequence
- $$0 \rightarrow \pi_2(G) \rightarrow \pi_2(G/T) \rightarrow \pi_1(T) \rightarrow 0.$$
- 61) *** Let (X, A) be a relative CW-complex obtained from A by adding one n -cell. Show, that $\pi_n(X, A, a_0)$ is a free $\pi_1(A, a_0)$ -module on one generator. (Here a_0 is a distinguished point in A .)
- 62) ♠ Let $X = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n : z_i \neq z_j \text{ for } i \neq j\}$. Compute $\pi_k(X)$ for $k > 1$. Do you know $\pi_1(X)$? *puorg diarb erup*
- 63) !!! (compare Problem 49) For $n > 1$ we have $\pi_n(S^4) \simeq \pi_n(S^7) \oplus \pi_{n-1}(S^3)$ and $\pi_n(8) \simeq \pi_n(S^{15}) \oplus \pi_{n-1}(S^7)$.
- 64) !!! Let P_n be the space of complex polynomials of degree n without multiple roots. Compute $\pi_i(P_n)$ for $i \geq 0$.
- 65) !!! Suppose that X is a CW complex of dimension $\leq 2n + 2$ for some $n \geq 0$. Prove that the diagonal map $d : X \rightarrow X \times X$ is homotopic to a map d' such that $d'(X) \subset (X \times X^n) \cup (X^n \times X)$, where X^n is the n -th skeleton of X .
- 66) !!! If X is a CW-complex of type $K(\pi, n)$ for $n > 1$ and Y is an arbitrary CW-complex, then $\pi_n(X \vee Y) \simeq \pi_n(Y) \oplus \bigoplus_{\lambda \in \pi_1(Y)} \pi_\lambda$ where $\pi_\lambda = \pi$ for each λ .
- 67) (written homework) Given a sequence of groups $\{\pi_q\}_{q>0}$ with π_q abelian for $q > 1$, and given an action of π_1 as a group of operators on each π_q for $q > 1$, prove that there is a space Y which realizes this sequence (that is $\pi_q(Y) \simeq \pi_q$ and $\pi_l(Y)$ -action on $\pi_q(Y)$ corresponds to the action of π_1 on π_q).

Algebraic Topology II problems

Wersja 4 czerwca 2014

♠ = zrobione

1) Niech $f, g : M \rightarrow N$ będą odwzorowaniami gładkim rozmaitości, oraz $H : (0 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \times M \rightarrow N$ będzie gładką homotopią: $f(x) = H(0, x)$, $g(x) = H(1, x)$. Definiujemy odwzorowanie kompleksów de Rhama $I : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(N)$, $I(\omega) = \int_{[0,1]} H^* \omega$ (całkowanie po t składowej formy $H^* \omega$, która w lokalnych współrzędnych ma $dt \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_3} \wedge dx_{i_p}$). Udowodnić, że I (być może po korekcie znaków) jest homotopią pomiędzy f a g .

2) Zadania ze skryptu <http://www.mimuw.edu.pl/%7Esjack/ta/kompleksy%5Flancuchowe%5F1.pdf>

3) ♠ Sprawdzić w Spanierze §4.1.10 formułę rozwiązującą Zadanie 22.

4) ♠ Obliczyć homologie przestrzeni soczewkowej $S^{2n-1}/\mathbf{Z}_m$ (gdzie $S^{2n-1} \subset \mathbf{C}^n$, $\mathbf{Z}_m \subset \mathbf{C}^*$ działa przez mnożenie po współrzędnych). Podać rozkład komórkowy $S^{2n-1}/\mathbf{Z}_m$.

5) ♠ Obliczyć homologie $K(\mathbf{Z}_m, 1)$

6) Dane dwa funktory $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ i ich transformacja $F \rightarrow G$. Pokazać, że indukowane przekształcenia realizacji nerwów $|NF|, |NG| : |NC| \rightarrow |ND|$ są homotopijne.

(Wniosek: Jeśli kategoria $\mathcal{C}$ ma obiekt początkowy to $|N\mathcal{C}|$ jest ściągalna.)

7) ♠ Niech X zbiór symplecjalny. Wykazać $\text{colim}_{\Delta^n \rightarrow X} \Delta^n \rightarrow X$ jest izomorfizmem. (Tu Δ^n oznacza zbiór symplecjalny $\text{Hom}(-, [n])$, granica jest wzięta po kategorii, której obiektami są odwzorowania $\Delta^n \rightarrow X$, a

odwzorowania postaci $\begin{array}{ccc} \Delta^n & \longrightarrow & \Delta^m \\ & \searrow \swarrow & \\ & X & \end{array}$.

8) $f, g : \Delta^n \rightarrow X$ są równe wtedy i tylko wtedy gdy $|f|$ i $|g| : |\Delta^n| \rightarrow |X|$ są równe.

9) (referat) Niech X przestrzeń topologiczna. Wykazać, że naturalne przekształcenie $|S(X)| \rightarrow X$ jest słabą homotopijną równoważnością.

10) ♠ Skonstruować triangulację pryzmatu $|\Delta^m| \times |\Delta^n|$.

11) ♠ Niech $X_\bullet$ będzie zbiorem symplecjalnym. Przez X_n^{nd} oznaczamy sympleksy niezdegenerowane. Wykazać, że oczywiste przekształcenie

$$\bigsqcup_{k=0}^{\infty} X_k^{nd} \times \text{int}(|\Delta|^k) \rightarrow |X_\bullet|$$

jest bijekcją.

12) Dane $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ pokrycie przestrzeni X . Załóżmy, że w to pokrycie można wpisać rozkład jedynki. Udowodnić, że $|N\mathcal{U}|$ jest homotopijnie równoważne z X . (Tu $N\mathcal{U}$ rozumiemy jako topologiczną kategorię.)
Graeme Segal, Classifying spaces and spectral sequences. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 34, 105-112 (1968).

13) W powyższym zadaniu załóżmy dodatkowo, że każde niepuste przecięcie $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$ jest ściągalne. Wtedy $|\pi_0(N\mathcal{U})| \sim X$.

Tu przez π_0 rozumiemy funktor $\pi_0(-)$ przyłożony do każdego poziomu zbioru symplecjalnego. Otrzymujemy zbiór symplecjalny $Y(n) =$ zbiór ciągów $i_0, i_1, i_2, \dots, i_n$ takich, że $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$ jest niepuste.

(Żeby rozwiązać to zadanie można np użyć fakt, że odwzorowanie właściwe ze ściągającymi włóknami jest homotopijną równoważnością; oczywiście przy pewnych ogólnie-topologicznych założeniach.)

Rozważamy kategorię homotopijną przestrzeni punktowanych. Oznaczenie $[A, B]$ oznacza klasy homotopii odwzorowań przestrzeni z wyróżnionym punktem. Poniżej zakładamy, że (X, A) jest parą CW-kompleksów, $A \neq \emptyset$, bo zawiera punkt wyróżniony. Referencje: książka *Robert M. Switzer, Algebraic topology - homotopy and homology*.

14) $\frac{1}{2}\spadesuit$ Dany ciąg przestrzeni topologicznych $\{E_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ oraz odwzorowania $S^1 \wedge E_i \rightarrow E_{i+1}$. (Np. $E_i = S^i E_0$ dla $i \geq 0$, ogólnie lepiej coś jeszcze o ciągu E_i założyć, np że E_i jest $i - 1$ -spójne.) Wykazać, że $h_n(X, A) = \text{colim}_i \pi_{n+i}(E_i \wedge (X/A))$ jest uogólnioną teorią homologii.

Wskazówka: Theorem, str 84 ze skryptu Maya

<http://www.math.uchicago.edu/%7Emay/CONCISE/ConciseRevised.pdf>

15) Przy powyższych założeniach wykazać, że $h^n(X, A) = \text{colim}_i [S^i(X/A), E_{n+i}]$ jest uogólnioną teorią kohomologii.

16) $\spadesuit$ Dany ciąg przestrzeni E_i o tej własności że $\Omega E_{i+1} \sim E_i$ (tzn. dana jest homotopijna równoważność). Wykazać, że $h^n(X, A) = [(X/A), E_n]$ jest uogólnioną teorią kohomologii.

17) $\spadesuit$ Dana przestrzeń K mająca tę własność, że dla pewnego r mamy homotopijną równoważność $\Omega^r K \sim K$. Wykazać, że $[X, K]$ jest równe $\mathbf{K}^0(X)$ dla pewnej teorii kohomologii. Ścisłej mówiąc funktor $X \mapsto [X, K]$ rozszerza się do funktora określonego na parach CW-kompleksów $\mathbf{K}^*(X, A)$ takiego, że $\mathbf{K}^0(X, A) = [X/A, K]$.

18) $\spadesuit$ Udowodnić, że w kompleksie komórkowym dla $[\sigma] \in C_n(\mathcal{X})$ różniczka δ zadana jest wzorem

$$\delta([\sigma]) = \sum_{\tau \in (n-1)\text{-komórki}} a_{\sigma}^{\tau} [\tau],$$

gdzie a_{σ}^{τ} jest stopniem odwzorowania

$$S^{n-1} \xrightarrow{\chi_{\sigma}} X_{n-1} \longrightarrow X_{n-1}/X_{n-2} \simeq \bigvee_{\tau} S_{\tau}^{n-1} \longrightarrow S_{\tau}^{n-1}.$$

19) $\spadesuit$ Dane $r \geq 0$. Niech $X = \bigcup_{i=0}^n U_i$ będzie sumą otwartych zbiorów. Załóżmy, że $H^k(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_d}) = 0$ dla $\{i_0, i_1, \dots, i_d\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$, $k > r$.

(i) pokazać, że $H^k(X) = 0$ dla $k > n + r$.

(ii) jeśli $r = 0$ i dodatkowo przecięcia $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_d}$ są puste lub łukowo spójne to $\overline{H}^n(X) = 0$ dla $n \geq r$.

20) $\spadesuit$ Obliczyć $H_*(D^n \times Y, S^{n-1} \times Y)$.

21) $\spadesuit$ Obliczyć $H_*(S^n \times Y)$

22) Obliczyć $H_*(X * Y)$.

23) Dane przedstawienie grupy $\pi = F/R$, gdzie F jest wolną grupą, a $R \subset F$ jest podgrupą normalną. Udowodnić $H_2(K(\pi, 2); \mathbf{Z}) \simeq R \cap [F, F]/[F, R]$.

24) Dane dwie zamknięte zorientowane rozmaitości wymiaru n . Obliczyć homologie sumy spójnej

$$M \# N = \frac{(M \setminus D^n) \cup (I \times S^{n-1})}{\{0\} \times S^{n-1}} \cup \frac{(N \setminus D^n)}{\{1\} \times S^{n-1}}.$$

25) Znaleźć utożsamienie $H^1(X; \mathbf{Z}_2)$ ze zbiorem klas izomorfizmu nakryć 2-krotnych nad X .

26) Znaleźć utożsamienie $H^2(X; \mathbf{Z})$ ze zbiorem klas izomorfizmu zespolonych wiązek liniowych nad X .

27) Przestrzeń Moora: niech $f_{n,d} : S^n \rightarrow S^n$ będzie przekształceniem stopnia d . Obliczyć homologie $C(f)$.

28) $f = f_{n,d}$ j.w. Obliczyć homologie teleskopu

$$S_{(d^\vee)}^n = Tel(S^n \xrightarrow{f} S^n \xrightarrow{f} S^n \xrightarrow{f} S^n \xrightarrow{f} S^n \xrightarrow{f} \dots)$$

29) Dany CW-kompleks X posklejany za pomocą odwzorowań charakterystycznych χ_σ . Udowodnić, że istnieje przestrzeń $X_{(d^\vee)}$ sklejana z teleskopów, tzn dla każdej komórki σ mamy diagram przemienny

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\chi_\sigma} & X^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{(d^\vee)}^{n-1} & \xrightarrow{(\chi_\sigma)_{(d^\vee)}} & X_{(d^\vee)}^{n-1} \end{array}$$

oraz

$$X_{(d^\vee)}^n = PushOut(X_{(d^\vee)}^{n-1} \leftarrow \bigsqcup S_{(d^\vee)}^{n-1} \rightarrow \bigsqcup C(S_{(d^\vee)}^n)).$$

Obliczyć homologie $X_{(d^\vee)}$.

30) Skonstruować taki CW-kompleks Y aby $H_*(Y) = H_*(X) \otimes \mathbf{Z}_{(p)}$, gdzie $\mathbf{Z}_{(p)}$ oznacza lokalizację pierścienia $\mathbf{Z}$ w ideale (p) .

31) ♠ Niech $X \rightarrow Y$ będzie nakryciem stopnia $d < \infty$. Załóżmy, że d jest odwracalne w pierścieniu R . Znaleźć związek pomiędzy $H_*(X; R)$ a $H_*(Y; R)$. Dla nakryć regularnych udowodnić $H_*(X; R)^G = H_*(Y; R)$, gdzie G jest grupą transformacji nakrywających.

32) ♠ Jeśli przestrzeń jest produktem sfer, to ilość i wymiary sfer mogą być odczytane z homologii $H_*(-; \mathbf{Z}_p)$.

33) ♠ Czy powyższe stwierdzenie jest prawdziwe dla rzeczywistych przestrzeni rzutowych?

34) ♠ Obliczyć $H_*(X; R)$ i $H^*(X; R)$ dla $X = \mathbf{RP}^2, \mathbf{RP}^3, \mathbf{RP}^2 \times \mathbf{RP}^2, \mathbf{RP}^3 \times \mathbf{RP}^3, R = \mathbf{Z}, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_4$ oraz homomorfizmy Bocksteina i $H^*(X, R) \rightarrow Hom(H_*(X, R), R)$.

35) Niech, M i N będą R -modułami. Niech $p_X : X \times Y \rightarrow X$ i $p_Y : X \times Y \rightarrow Y$ będą rzutowaniami. (Np indukcyjnie po szkieletach) wykazać, że gdy $H^*(X; M)$ jest wolnym R -modulem, to

$$\phi : H^*(X; M) \otimes H^*(Y; N) \rightarrow H^*(X \times Y, M \otimes N)$$

$$\phi(a \otimes b) = p_X^*(a) \cup p_Y^*(b)$$

jest izomorfizmem.

36) ♠ Obliczyć pierścień kohomologii zwartych orientowalnych powierzchni.

37) ♠ Dane rozwłóknienie lokalnie trywialne pary $(E, \partial E) \rightarrow B$ nad spójną bazą, z włóknem $(F, \partial F)$. Załóżmy, że $H^*(F, \partial F)$ jest grupą wolną, oraz przekształcenie indukowane włożeniem włókna $H^*(E, \partial E) \rightarrow H^*(F, \partial F)$ jest epimorfizmem. Udowodnić, że $H^*(E, \partial E) \simeq H^*(F, \partial F) \otimes H^*(B)$. (Wsk. najpierw udowodnić dla skończonych pokryw trywializujących.) Udowodnić analogiczny rezultat dla homologii.

38) Zadania z książki Spaniera (link ze strony)

– str 279 C8, E1

– str 280 D4, D5, G1

– str 281 G3, G4

39) Niech skończona grupa G działa na rozmaitość M zachowując orientację w otoczeniu punktów stałych. Załóżmy, że R jest pierścieniem, w którym $|G|$ jest odwracalne. Udowodnić, że M/G jest R -homologiczną rozmaitością. Policz $H^*(M/G; R)$. (Najpierw rozpatrzyć przypadek, gdy poza zbiorem dyskretnym G działa wolno).

40) **Pisemnie.** Obliczyć pierścień kohomologii $H^*(\mathbf{RP}^2 \otimes \mathbf{RP}^2; \mathbf{Z})$ i $H^*(\mathbf{RP}^2 \otimes \mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}_4)$ zakładając, że $H^*(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2[h]/(h^3)$.

41) ♠ Niech M będzie zorientowaną zwartą rozmaitością, a N_1 i N_2 zorientowanymi podrozmaitościami. Oznaczmy przez $PD : H^*(M) \rightarrow H_{\dim M - *}(M)$ dualność Poincaré oraz $i_k : N_k \rightarrow M$ włożenia. Załóżmy, że N_1 i N_2 są transwersalne, i niech $i_{12} : N_1 \cap N_2 \rightarrow M$ będzie włożeniem. Udowodnić

$$PD^{-1}i_{1*}([N_1]) \cup PD^{-1}i_{2*}([N_2]) = PD^{-1}i_{12*}([N_1 \cap N_2])$$

42) ♠ Niech M będzie rozmaitością 4-wymiarową zadaną orientacją, $\dim M = 4m$. Forma przecięć jest zadana na $H^{even}(M)$ przez $(a, b) \mapsto \iota_*((a \cup b) \cap [M]) \in H_0(pt) = \mathbf{Z}$. Pokazać, że sygnatura formy na $H^{even}(M)$ jest równa sygnaturze formy na $H^{2m}(M)$. Udowodnić, że sygnatura formy przecięć w $H^{even}(M)$ jest homomorfizmem z pierścienia bordyzmów do $\mathbf{Z}$.