

ZADANIA DLA UCZESTNIKÓW SEMINARIUM
Z TOPOLOGII ALGEBRAICZNEJ 2003/2004

1 GAL

Algebra liniowa, czasem z gradacją

1.1 Jeśli V jest rzeczywista przestrzenią liniową z zadany operator $J : V \rightarrow V$ takim, że $J^2 = -1$ (czyli struktura zespolona), to na V można zadać naturalną orientację.

1.2 Jeśli V jest rzeczywista przestrzenią liniową to jej kompleksyfikacja $\mathbf{C} \otimes V$ posiada naturalną orientację.

1.3 Algebra tensorowa jako funktor dołączony. Niech GA oznacza kategorię algebr z gradacją (niekoniecznie przemienne) nad ciałem k a $F : GA \rightarrow Vect_k^*$ będzie funktorem zapominania o wartościach w kategorii przestrzeni wektorowych (z gradacją). Istnieje funktor $T : Vect_k^* \rightarrow DA$ dołączony z prawej strony do F tzn. taki, że $Hom_{GA}(T(V), A) \simeq Hom_{Vect_k^*}(V, A)$.

1.4 Algebra zewnętrzna jako funktor dołączony. Niech CGA oznacza kategorię antyprzemienne algebr z gradacją nad ciałem k a $F : CGA \rightarrow Vect_k^*$ będzie funktorem zapominania o wartościach w kategorii przestrzeni wektorowych (z gradacją). Istnieje funktor $\Lambda : Vect_k^* \rightarrow CGA$ dołączony z prawej strony do F tzn. taki, że $Hom_{CGA}(\Lambda(V), A) \simeq Hom_{Vect_k^*}(V, A)$.

Algebry z gradacją i różniczką (CDGA) i formy różniczkowe

1.5 Niech $C^\bullet$ będzie przemienią algebrą (nad k) z gradacją i różniczką spełniającą regułę Leibniza. (Mówimy wtedy, że C jest $CDGA/k$.) Wykazać, że kohomologie $H^*(C^\bullet)$ są przemienią algebrą z gradacją: mnożenie jest indukowane mnożeniem w $C^\bullet$.

1.6 Niech $\iota : CDGA/k \rightarrow CA/k$ będzie funktorem zapominania prowadzącym do algebr przemienne $\iota(C^\bullet) = C^0$. Wykazać, że ι ma funktor dołączony Ω :

$$Hom_{CA/k}(A, \iota C) = Hom_{CDGA/k}(\Omega(A), C).$$

1.7 Pokazać, że $\Omega(A)$ jest A -algebrą generowaną przez symbole $da \in (\Omega(A))^1$ dla $a \in A$ z relacjami generowanymi przez $d(a+b) = da + db$, $d(ab) = (da)b + a(db)$, oraz $dc = 0$ dla $c \in k \subset A$.

Słownik

Niech K będzie dowolnym ciałem charakterystyki różnej od 2. Dana jest przestrzeń wektorowa nad K , $\dim V = n < \infty$. Rozważamy działanie Σ_k na $V^{\otimes k}$

$$\sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = \operatorname{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}.$$

Potęę zewnętrzną $\Lambda^k(V)$ definiujemy jako $(V^{\otimes k})^{\Sigma_k}$, tzn. jako antysymetryczne tensory. Inne oznaczenia:

- V^* – przestrzeń sprzężona,
- $\Lambda^k(V^*)$ utożsamiamy z antysymetrycznymi formami k -liniowymi na V .

Dla rozmaitości M :

- $T_x M$ dla $x \in M$ – przestrzeń styczna, TM – wiązka styczna,
- $\Lambda^k TM$ – k -ta potęga zewnętrzna wiązki stycznej,
- $Vect(M)$ – pola wektorowe, czyli przekroje wiązki stycznej,
- $Vect^k(M)$ – przekroje wiązki $\Lambda^k TM$.
- $T_x^* M$ dla $x \in M$ – przestrzeń kostyczna, $T^* M$ – wiązka kostyczna,
- $\Lambda^k T^* M$ – k -ta potęga zewnętrzna wiązki kostycznej,
- $\Omega^k(M)$ – przekroje wiązki $\Lambda^k(T^* M)$, tzn formy różniczkowe stopnia k .

1.8 Wykazać, że złożenie włożenia i projekcji

$$\Lambda^k(V) = (V^{\otimes k})^{\Sigma_k} \subset V^{\otimes k} \longrightarrow (V^{\otimes k})/\Sigma_k$$

jest izomorfizmem.

1.9 Sprawdzić, że $\Lambda^k(V^*) \simeq (\Lambda^k V)^*$.

1.10 Udowodnić, że istnieje naturalny (tzn. niezależny od wyboru bazy) izomorfizm

$$\Lambda^k(V^*) \xrightarrow{\phi} \Lambda^{n-k}(V) \otimes \Lambda^n(V^*).$$

Izomorfizm ϕ jest dołączony do mnożenia zewnętrznego

$$\Lambda^k(V^*) \times \Lambda^{n-k}(V^*) \xrightarrow{\wedge} \Lambda^n(V^*).$$

Zatem na rozmaitości gładkiej wymiaru n (bez dodatkowych struktur) mamy naturalne utożsamienie $\Omega^k(M) \simeq Vect^{n-k}(M) \otimes \Omega^n(M)$.

1.11 Niech będą dane

- kompleks przestrzeni wektorowych skończonego wymiaru

$$0 \xrightarrow{d} V^0 \xrightarrow{d} V^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} V^{n-1} \xrightarrow{d} V^n \xrightarrow{d} 0;$$

- izomorfizm $*$: $V^k \longrightarrow V^{n-k}$;
- formy dwuliniowe $\int : V^k \times V^{n-k} \rightarrow \mathbf{R}$ takie, że $\langle x, y \rangle = \int(x, *y)$ jest iloczynem skalarnym w V^k , oraz $\int(dx, y) + (-1)^k \int(x, dy) = 0$ dla $x \in V^k$, $y \in V^{n-k-1}$.

Zdefiniować formy harmoniczne, udowodnić rozkład Hodge'a i udowodnić, że w każdej klasie kohomologii jest dokładnie jedna forma harmoniczna. Udowodnić dualność Poicarégo.

2 Rozmaitości gładkie i analityczne

2.1 Niech $f : M \rightarrow N$ będzie właściwym holomorficznym odwzorowaniem rozmaitości zespolonych. Załóżmy, że N jest spójna. Wykazać, że jeśli p i q są wartościami regularnymi f , to $f^{-1}(p)$ i $f^{-1}(q)$ są dyfeomorficzne (nie koniecznie holomorficznie równoważne).

2.2 Niech $f : M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem właściwym rozmaitości gładkich. Jeśli f jest submersją, to f jest lokalnie trywialne (w kategorii gładkiej, ale nie analitycznej, nawet jeśli przekształcenie jest analityczne!).

2.3 Niech grupa dyskretna G działa na rozmaitości topologicznej M w sposób właściwie nieciągły (tzn. taki, że $M \rightarrow M/G$ jest nakryciem z włóknem G). Wykazać, że

- Jeśli M jest gładka (odp. analityczna) a działanie jest gładkie (odp. analityczne), to projekcja M/G ma strukturę gładką (odp. analityczną) a $p : M \rightarrow M/G$ jest lokalnym dyfeomorfizmem.
- Jeśli M jest gładka i zorientowana, a działanie G zachowuje orientację, to M/G posiada naturalną orientację.

2.4 Jeśli $p : \tilde{M} \rightarrow M$ jest nakryciem nad rozmaitością gładką (odp. zorientowaną, analityczną) to M jest także rozmaitością gładką (odp. zorientowaną, analityczną).

2.5 Niech M będzie rozmaitością gładką. Oznaczamy przez $C^\infty(M)$ algebrę funkcji gładkich. Pokazać, że algebra form różniczkowych $\Omega_M^\bullet$ jest izomorficzna z $\Omega(C^\infty(M))$.

3 Kohomologie deRhama

Uwaga: $H^*(M)$ oznacza grupę (pierścień) kohomologii de Rhama.

3.1 Znaleźć zamkniętą formę różniczkową generującą $H^{n-1}(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$.

3.2 Niech $\alpha \in H^k(M)$ oraz A będzie zbiorem wymiaru mniejszego niż k . (Zakładamy, że A jest dostatecznie regularny, np. jest podrozmaitością.) Pokazać, że istnieje forma ω reprezentująca klasę α taka, że $\overline{\text{supp}(\omega)} \cap A = \emptyset$

3.3 Niech M będzie spójną rozmaitością wymiaru n . Wykazać, że albo $H^n(M) = \mathbf{R}$ (gdy M jest zwarta), albo $H^n(M) = 0$ (gdy nie jest zwarta).

3.4 Udowodnić, że $H^1(M) = \text{Hom}(\pi_1(M), \mathbf{R})$.

3.5 Niech grupa skończona G działa na rozmaitości M w sposób wolny. Wykazać, że $H^*(M/G) = H^*(M)^G$.

3.6 Opisać mnożenie w $H^*(M \# N)$. Obliczyć algebre kohomologii 2-wymiarowych precli.

3.7 Znaleźć formy harmoniczne na sferze, torusie, przestrzeni rzutowej.