

## GAL2\*

Zadania wybrane przez Andrzeja Webera i Jarosława Wiśniewskiego

### Zadania na pierwszy tydzień (28.02–04.03)

#### Kategoria przestrzeni wektorowych, przestrzenie ilorazowe

Ta seria zadań dotyczy materiału, który będzie przerabiany na ćwiczeniach przed wykładami, ma więc specjalny charakter. Przypominam, że Państwa aktywność na ćwiczeniach (i związana z nią ocena punktowa): materiał jest prezentowany równocześnie z przykładami, które mają charakter zadań do samodzielnego zrobienia. Zwykle zestaw zadań do zrobienia na kolejny tydzień będzie przedstawiony w sposób bardziej zwięzły.

#### Kategorie

**Przypomnienie:** Zajmujemy się przestrzeniami liniowymi nad ustalonym ciałem  $K$ ; często (z reguły) będziemy zakładać, że są to przestrzenie skończonego wymiaru. Przekształcenia liniowe  $\varphi : V \rightarrow W$  zachowują kombinacje liniowe. Zbiór  $L(V, W) = \{\varphi : V \rightarrow W, \text{ liniowe}\}$  jest przestrzenią liniową nad  $K$ . Przekształcenia liniowe możemy składać

$$\begin{array}{ccccc} & & \psi \circ \phi & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ V & \xrightarrow{\phi} & W & \xrightarrow{\psi} & U \end{array}$$

czyli mamy złożenie

$$L(V, W) \times L(W, U) \ni (\phi, \psi) \longrightarrow \psi \circ \phi \in L(V, U)$$

**Opis kategorijski:** Pracujemy w kategorii  $\mathcal{Vect}_K$  przestrzeni liniowych nad ciałem  $K$ :

- **objektami** w tej kategorii są przestrzenie liniowe  $V$  nad ciałem  $K$ ;
- **morfizmami** (strzałkami) w tej kategorii są odwzorowania liniowe; dla każdej pary przestrzeni liniowych mamy zbiór(!)  $\text{Mor}_{\mathcal{Vect}_K}(V, W) = L(V, W)$ ;
- morfizmy można składać, dla dowolnej trójki obiektów  $V, W, Z$  mamy

$$\text{Mor}_{\mathcal{Vect}_K}(V, W) \times \text{Mor}_{\mathcal{Vect}_K}(W, Z) \ni (\phi, \psi) \longrightarrow \psi \circ \phi \in \text{Mor}_{\mathcal{Vect}_K}(V, Z)$$

- składanie morfizmów jest łączne, czyli dla trójki morfizmów, które można składać, wynik nie zależy od kolejności składania, czyli  $(\phi \circ \psi) \circ \chi = \phi \circ (\psi \circ \chi)$
- **identyczność:** dla każdego obiektu  $V$  mamy wyróżniony (jedyny!) element  $\text{id}_V \in \text{Mor}_{\mathcal{Vect}_K}(V, V)$ , identyczność jest neutralna dla składania,

$$\forall \phi \in \text{Mor}_{\mathcal{Vect}_K}(V, W) : \text{id}_W \circ \phi = \phi = \phi \circ \text{id}_V$$

**Uwaga** Powyższe punkty charakteryzują dowolną kategorię  $\mathcal{C}$ : wystarczy zdefiniować klasę obiektów i morfizmy, i zamiast  $\mathcal{Vect}_K$  piszemy  $\mathcal{C}$  (lub cokolwiek innego). Na przykład w kategorii  $\mathcal{Vect}_K$  mamy podkategorię, w której obiektami są przestrzenie skończonego wymiaru, oznaczamy ją  $\mathcal{Vect}_K^{<\infty}$ .

**Zadanie 1** Sprawdź, że to są kategorie.

- Kategoria  $\mathcal{Set}$ , w której obiektami są zbiory a morfizmami funkcje.
- Dla dowolnego zbioru  $X$  kategoria  $\mathcal{P}(X)$ , w której obiektami są podzbiory zbioru  $X$  a morfizmami zawieranie (inkluzje) podzbiorów, czyli

$$\text{Mor}_{\mathcal{P}(X)}(A, B) = \begin{cases} \{\iota : A \hookrightarrow B\} & \text{jeśli } A \subseteq B \\ \emptyset & \text{jeśli } A \not\subseteq B \end{cases}$$

- Kategoria z jednym obiektem  $\star$ , w której  $\text{Mor}(\star, \star) = G$ , gdzie  $G$  jest dowolnym grupoidem z działaniem  $G \times G \ni (g_1, g_2) \rightarrow g_1 \circ g_2 \in G$ , które jest łączne i ma element neutralny  $1_G$ .

**Izomorfizm:** dwa obiekty  $V, W$  są izomorficzne jeśli istnieją  $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{V}ect_K}(V, W)$  i  $\psi \in \text{Mor}_{\mathcal{V}ect_K}(W, V)$ , takie że  $\psi \circ \phi = id_V$  i  $\phi \circ \psi = id_W$ .

**Obiekt zerowy, morfizm zerowy.** Kategoria  $\mathcal{V}ect_K$  ma wyróżniony obiekt: przestrzeń zerową  $0$ . Dla dowolnej przestrzeni  $V$  istnieje dokładnie jeden morfizm  $0 \rightarrow V$  i dokładnie jeden morfizm  $V \rightarrow 0$ , czyli  $|\text{Mor}_{\mathcal{V}ect_K}(0, V)| = |\text{Mor}_{\mathcal{V}ect_K}(V, 0)| = 1$ . Morfizm  $\Theta : V \rightarrow W$  nazywamy zerowym jeśli faktoryzuje się przez obiekt zerowy, czyli zachodzi równość dla złożenia

$$V \xrightarrow{\quad \Theta \quad} W$$

Morfizm zerowy jest wyznaczony jednoznacznie w  $\text{Mor}_{\mathcal{V}ect_K}(V, W)$  (dlaczego?) i będziemy go oznaczać po prostu przez  $0$ . Zwróć uwagę, że  $id_0 = 0$ .

**Uwaga** Diagram (graf) składający się z obiektów (wierzchołków grafu) i morfizmów (strzałek) nazywamy **przemiennym**, jeśli złożenie strzałek w odpowiedniej kolejności dają ten sam rezultat w odpowiednich zbiorach morfizmów (więcej przykładów poniżej).

**Obiekt początkowy.**  $P$  to taki obiekt w kategorii  $\mathcal{C}$ , że dla każdego obiektu  $A$  zbiór morfizmów  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(P, A)$  jest jednoelementowy.

**Obiekt końcowy.**  $K$  to taki obiekt w kategorii  $\mathcal{C}$ , że dla każdego obiektu  $A$  zbiór morfizmów  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, K)$  jest jednoelementowy.

**Zadanie 2** Udowodnić następujące fakty

- Jeśli w kategorii mamy dwa obiekty początkowe, to są one izomorficzne. Jeśli w kategorii mamy dwa obiekty końcowe, to są one izomorficzne.
- Obiekt zerowy zdefiniowany dla kategorii  $\mathcal{V}ect_K$  jest początkowy i końcowy.
- W kategorii  $\text{Set}$  istnieje obiekt początkowy  $\emptyset$  i istnieje obiekt końcowy  $\bullet$ . Pokaż, że te obiekty nie są izomorficzne.

**Monomorfizm.** Mówimy, że  $f : X \rightarrow Y$  jest monomorfizmem, jeśli dla dowolnych morfizmów  $g_1, g_2 : Z \rightarrow X$

$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2.$$

**Epimorfizm.** Mówimy, że  $f : X \rightarrow Y$  jest epimorfizmem, jeśli dla dowolnych morfizmów  $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2.$$

**Zadanie 3**

- Opisać monomorfizmy i epimorfizmy w kategorii zbiorów.
- Opisać monomorfizmy i epimorfizmy w kategorii przestrzeni wektorowych.
- Udowodnić, że jeśli  $f$  jest izomorfizmem, to jest monomorfizmem oraz epimorfizmem.
- Wskazać kategorię, w której istnieje morfizm, który jest monomorfizmem i epimorfizmem, ale nie jest izomorfizmem.

**Jądro** morfizmu  $\varphi : V \rightarrow W$  to  $\kappa : K \rightarrow V$  takie, że  $\varphi \circ \kappa = 0$  (zakładamy, że w kategorii  $\mathcal{C}$  istnieje obiekt zerowy) oraz dla dowolnego  $\kappa' : K' \rightarrow V$ , takiego że  $\varphi \circ \kappa' = 0$ , istnieje dokładnie jeden(!) morfizm  $\mu$ , że ten diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \curvearrowright & & \\ K & \xrightarrow{\kappa} & V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \exists! \mu \uparrow & & \nearrow \forall \kappa' & & \\ K' & \xrightarrow{\quad} & & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

**Zadanie 4** Sprawdź, że powyższa kategoryjna definicja jądra jest spełniona w kategorii  $\mathcal{Vect}_K$  przez jądro odwzorowań przestrzeni liniowych  $\ker \varphi = \{v \in V : \varphi(v) = 0\} \rightarrow V$ . Pokaż, że jądro zdefiniowane kategoryjnie jest jednoznaczne z dokładnością do izomorfizmu. Pokaż, że jądro morfizmu  $\kappa$  jest zerowe.

**Jądro różnicowe** (uogólnienie definicji jądra): Dane dwa przekształcenia  $f, g : V \rightarrow W$ . Jądro różnicowe to taki morfizm  $\iota : K \rightarrow V$  spełniający  $f \circ \iota = g \circ \iota$  oraz mający własność uniwersalną: dla każdego morfizmu  $h : Z \rightarrow V$ , takiego że  $f \circ h = g \circ h$ , istnieje dokładnie jeden morfizm  $h_0 : Z \rightarrow K$  taki, że  $h = \iota \circ h_0$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & \forall h & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ Z & \xrightarrow{\exists! h_0} & K & \xrightarrow{\iota} & V & \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xleftarrow{f} \end{array} & W \end{array}$$

**Zadanie 5** Czy w kategorii zbiorów  $\mathcal{Set}$  istnieje jądro różnicowe dla dowolnych morfizmów  $f, g : X \rightarrow Y$ ? Czy w kategorii przestrzeni liniowych  $\mathcal{Vect}_K$  istnieje jądro różnicowe?

**Produkt.** Mówimy, że  $P$  wraz z przekształceniami  $\pi_1 : P \rightarrow V_1$  i  $\pi_2 : P \rightarrow V_2$  jest produktem obiektów  $V_1$  i  $V_2$  (i piszemy  $P \simeq V_1 \times V_2$ ) jeśli jest spełniony warunek dla dowolnego obiektu  $Z$  oraz morfizmów  $\phi_1 : Z \rightarrow V_1$ ,  $\phi_2 : Z \rightarrow V_2$  istnieje dokładnie jeden morfizm  $\phi : Z \rightarrow P$  taki, że  $\phi_i = \pi_i \circ \phi$  dla  $i = 1, 2$

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \nwarrow \pi_1 & \uparrow \exists! \phi & \nearrow \pi_2 & \\ V_1 & & & & V_2 \\ & \nwarrow \forall \phi_1 & \downarrow \forall \phi & \nearrow \forall \phi_2 & \\ & & Z & & \end{array}$$

**Koprodukt.** Mówimy, że  $S$  wraz z przekształceniami  $\iota_1 : V_1 \rightarrow S$  i  $\iota_2 : V_2 \rightarrow S$  jest koproduktem obiektów  $V_1$  i  $V_2$  (i piszemy  $S \simeq V_1 \sqcup V_2$ ) jeśli jest spełniony warunek dla dowolnego obiektu  $Z$  oraz morfizmów  $\phi_1 : V_1 \rightarrow Z$ ,  $\phi_2 : V_2 \rightarrow Z$  istnieje dokładnie jeden morfizm  $\phi : S \rightarrow Z$ , taki, że  $\phi_i = \phi \circ \iota_i$  dla  $i = 1, 2$

$$\begin{array}{ccccc} & & S & & \\ & \nwarrow \iota_1 & \downarrow \exists! \phi & \nearrow \iota_2 & \\ V_1 & & & & V_2 \\ & \nwarrow \forall \phi_1 & \downarrow \forall \phi & \nearrow \forall \phi_2 & \\ & & Z & & \end{array}$$

## Zadanie 6

- Czy w kategorii przestrzeni wektorowych istnieją produkty i koprodukty dowolnych dwóch obiektów? Czy koprodukt dwóch przestrzeni wektorowych jest izomorficzny produktowi?
- Czy w kategorii zbiorów istnieją produkty i koprodukty dowolnych dwóch obiektów? Czy koprodukt dwóch zbiorów jest izomorficzny produktowi?

**Produkt i koprodukt rodziny obiektów** Niech  $A_i$  będzie rodzina obiektów indeksowaną  $i \in I$ .

- Obiekt  $S$  wraz z odwzorowaniami  $\iota_i : A_i \rightarrow S$  nazywamy koproduktem rodziny  $\{A_i\}_{i \in I}$  gdy dla dowolnego obiektu  $C$  oraz morfizmów  $f_i : A_i \rightarrow C$  istnieje dokładnie jeden morfizm  $f : S \rightarrow C$  taki, że  $f_i = f \circ \iota_i$  dla każdego  $i \in I$ .
- Obiekt  $P$  wraz z odwzorowaniami  $\pi_i : P \rightarrow A_i$  nazywamy produktem rodziny  $\{A_i\}_{i \in I}$  gdy dla dowolnego obiektu  $C$  oraz morfizmów  $f_i : C \rightarrow A_i$  istnieje dokładnie jeden morfizm  $f : C \rightarrow P$  taki, że  $f_i = \pi_i \circ f$  dla każdego  $i \in I$ .

## Zadanie 7

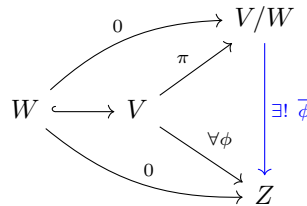
- (a) Wykazać, że produkty i koprodukty skończonych rodzin przestrzeni wektorowych są izomorficzne w kategorii  $\mathcal{Vect}_K$ .
- (b) Wykazać, że produkty i koprodukty nieskończonych rodzin przestrzeni wektorowych na ogół nie są izomorficzne w kategorii  $\mathcal{Vect}_K$ .
- (c) Czy w kategorii  $\mathcal{P}(X)$  zdefiniowanej powyżej istnieją produkty i koprodukty dowolnych dwóch obiektów? Czy koprodukt dwóch zbiorów jest izomorficzny produktowi?

## Ilorazy

**Iloraz przestrzeni wektorowych.** Niech  $W \subset V$  będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej nad  $K$ . Definiujemy relację równoważności w  $V$  w sposób następujący:  $\alpha \sim \beta$  jeśli  $\alpha - \beta \in W$ . Klasa abstrakcji wektora  $\alpha$  to zbiór  $\alpha + W = \{\alpha + w : w \in W\}$  nazywany też warstwą wektora  $\alpha$  względem podprzestrzeni  $W$ . Zbiór klas abstrakcji ma strukturę przestrzeni liniowej z dodawaniem  $(\alpha + W) + (\beta + W) = (\alpha + \beta) + W$  i mnożeniem przez skalary  $a \cdot (\alpha + W) = (a \cdot \alpha) + W$  (sprawdź, że te operacje są dobrze określone). Tak zdefiniowaną przestrzeń nad  $K$  nazywamy przestrzenią ilorazową i oznaczamy  $V/W$ .

**Zadanie 8** Dowiedź następujących podstawowych własności przestrzeni ilorazowej

- (a) Odwzorowanie  $\pi : V \rightarrow V/W$  zdefiniowane wzorem  $\pi(\alpha) = \alpha + W$  jest liniowe, jest epimorfizmem oraz  $\ker(\pi) = W$ .
- (b) Własność uniwersalna ilorazu. Dla każdego przekształcenia liniowego  $\phi : V \rightarrow Z$  takiego, że  $\phi|_W = 0$  istnieje dokładnie jedno przekształcenie  $\bar{\phi} : V/W \rightarrow Z$  takie, że  $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$



- (c) Powyższa własność uniwersalna determinuje iloraz z dokładnością do izomorfizmu. Dokładniej: jeśli odwzorowanie  $p : V \rightarrow Q$  spełnia warunek:  $p \circ \iota = 0$ , gdzie  $\iota : W \rightarrow V$  jest włożeniem, oraz dla każdego przekształcenia liniowego  $\phi : V \rightarrow Z$  takiego, że  $\phi|_W = 0$  istnieje dokładnie jedno przekształcenie  $\bar{\phi}$  takie, że  $\phi = \bar{\phi} \circ p$ , to  $Q \simeq V/W$  oraz ten izomorfizm jest zgodny z przekształceniami  $p : V \rightarrow Q$  i  $\pi : V \rightarrow V/W$ .
- (d) Jeśli  $\psi : V \rightarrow U$  i  $\phi : U \rightarrow Z$  są przekształceniami liniowymi taki, że  $(\phi \circ \psi)|_W = 0$ , to istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe  $\bar{\psi} : V/W \rightarrow Z$  takie, że następujący diagram jest przemienny

$$\begin{array}{ccccc}
 W & \hookrightarrow & V & \xrightarrow{\pi} & V/W \\
 \downarrow \psi|_W & & \downarrow \forall \psi & & \downarrow \exists! \bar{\psi} \\
 \ker(\phi) & \hookrightarrow & U & \xrightarrow{\phi} & Z
 \end{array}$$

gdzie "haczykowane" strzałki oznaczają monomorfizmy.

**Zadanie 9** Pokaż następujące własności ilorazu.

- (a) Dla dowolnych podprzestrzeni  $U, W \subset V$  zachodzi izomorfizm ilorazów

$$(U + W)/W \simeq U/(U \cap W)$$

- (b) Niech  $\phi : V \rightarrow Z$  będzie przekształceniem liniowym. Wówczas istnieje naturalne przekształcenie

$$\bar{\phi} : V/\ker(\phi) \rightarrow Z$$

takie, że  $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$ . Ponadto  $\bar{\phi}$  zadaje izomorfizm  $V/\ker(\phi) \simeq \text{im}(\phi)$

- (c) Jeśli  $V = W \oplus U$  to mamy izomorfizm  $V/W \simeq U$ . Jeśli  $V$  jest skończonego wymiaru, to  $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$ . Uwaga: kowymiar podprzestrzeni liniowej definiujemy jako wymiar przestrzeni ilorazowej  $\text{codim}_V(W) = \dim(V/W)$ . Kowymiar może być Jeśli  $V$  jest skończonego wymiaru, to  $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$ . Kowymiar definiujemy jako

$$\text{codim}_V(W) = \dim(V/W).$$

Kowymiar może być skończony nawet gdy  $\dim V = \infty$ .

- (d) Niech  $U \subset W \subset V$  będą przestrzeniami liniowymi, wówczas mamy izomorfizm ilorazów

$$(V/U)/(W/U) \simeq V/W.$$

- (e) Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie zbiorem domkniętym oraz niech  $C(A)$  oznacza zbiór funkcji ciągłych na  $A$ . Wtedy mamy izomorfizm  $\mathbb{R}$  przestrzeni liniowych  $C(A) \simeq C(\mathbb{R})/I(A)$ , gdzie  $I(A) = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \forall x \in A, f(x) = 0\}$ .

**Kojądro** morfizmu definiujemy kategoriennie przez odwrócenie strzałek w definicji jądra. Kojądro morfizmu  $\varphi : V \rightarrow W$  to  $\kappa : W \rightarrow Q$  takie, że  $\kappa \circ \varphi = 0$  oraz dla dowolnego  $\kappa' : W \rightarrow Q'$ , takiego że  $\kappa' \circ \varphi = 0$ , istnieje dokładnie jeden(!) morfizm  $\mu : Q \rightarrow Q'$ , że ten diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ & \searrow 0 & \nearrow \kappa \\ & & Q \\ & \searrow \forall \kappa' & \nearrow \exists! \mu \\ & & Q' \end{array}$$

### Zadanie 10

- (a) Pokaż, że kojądro jest zdefiniowane jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Pokaż, że kojądro istnieje w kategorii  $\mathcal{Vect}_K$ .
- (b) Niech  $\varphi : V \rightarrow W$  będzie przekształceniem liniowym przestrzeni wektorowych z jądrem  $\iota : K \rightarrow V$  i kojądrem  $\kappa : W \rightarrow Q$ . Pokaż, że jądro przekształcenia sprzężonego  $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$  to  $\kappa^* : Q^* \rightarrow W^*$  a kojądro  $\varphi^*$  to  $\iota^* : V^* \rightarrow K^*$ .

**Push-out, pull-back.** Załóżmy, że mamy dane trzy obiekty i dwa morfizmy  $V_1 \xleftarrow{\phi_1} W \xrightarrow{\phi_2} V_2$ .

Push-out to obiekt  $P$  i morfizmy  $V_1 \xrightarrow{\pi_1} P \xleftarrow{\pi_2} V_2$  takie, że  $\pi_1 \circ \phi_1 = \pi_2 \circ \phi_2$ , które mają następującą własność uniwersalną: Dla każdej pary przekształceń  $\psi_1 : V_1 \rightarrow Z$ ,  $\psi_2 : V_2 \rightarrow Z$  takiej, że  $\psi_1 \circ \phi_1 = \psi_2 \circ \phi_2$  istnieje dokładnie jedno przekształcenie  $\psi : P \rightarrow Z$  takie, że  $\psi_1 = \psi \circ \pi_1$  i  $\psi_2 = \psi \circ \pi_2$ :

$$\begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{\phi_1} & V_1 & & \\ \phi_2 \downarrow & & \downarrow \pi_1 & \searrow \forall \psi_1 & \\ V_2 & \xrightarrow{\pi_2} & P & \xrightarrow{\exists! \psi} & Z \\ & \searrow \forall \psi_2 & & \nearrow & \end{array}$$

Definicja push-outu ma sens w dowolnej kategorii (choć nie zawsze push-out musi istnieć). Odwracając kierunki strzałek w diagramie definiującym push-out zdefiniujemy pojęcie dualne, tzw. pull-back. Czyli dla  $V_1 \xrightarrow{\phi_1} W \xleftarrow{\phi_2} V_2$  definiujemy obiekt  $R$  z morfizmami  $V_1 \xleftarrow{\pi_1} R \xrightarrow{\pi_2} V_2$ , dla których odpowiednie złożenia i własność uniwersalna opisuje się przez diagram

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & \searrow \forall \psi_1 & \downarrow \pi_1 & \nearrow \exists! \psi & \\ & & R & \xrightarrow{\pi_2} & V_2 \\ & \searrow \forall \psi_2 & \downarrow \pi_2 & \nearrow \phi_2 & \\ & & V_1 & \xrightarrow{\phi_1} & W \end{array}$$

**Zadanie 11**

- (a) Pokazać, że jeśli  $V_2 = 0$ , to push-out  $\pi_1 : V_1 \rightarrow P$  jest kojądrem  $\phi_1$ .
- (b) Udowodnić, że w kategorii przestrzeni wektorowych push-out jest izomorficzny z ilorazem  $P = (V_1 \times V_2)/U$ , gdzie

$$U = \{(\phi_1(w), -\phi_2(w)) \mid w \in W\}$$

- (c) Czy pull-backi istnieją w kategorii zbiorów oraz w kategorii przestrzeni wektorowych? Jeśli tak, to podaj konstrukcję.

## GAL2\*

### Zadania na drugi tydzień (07.11–11.03)

#### Endomorfizmy, wielomian charakterystyczny, wektory własne, wartości własne, diagonalizowalność

Zadania oznaczone † są do zrobienia w pierwszej kolejności.

##### Endomorfizmy.

**Zadanie 1** † Niech  $\varphi$  będzie automorfizmem przestrzeni wektorowej  $V$  spełniającym  $\varphi^2 = id$ . Załóżmy, że charakterystyka ciała bazowego jest różna od 2.

- a) Wykazać, że  $\varphi$  symetrią, tzn istnieje rozkład  $V = V_1 \oplus V_2$  taki, że  $\phi|_{V_1} = id|_{V_1}$  i  $\phi|_{V_2} = -id|_{V_2}$
- b) Podać wzór na rzutowania  $V$  na podprzestrzenie  $V_1$  i  $V_2$ .
- c) Przeanalizować sytuację gdy charakterystyka ciała jest równa 2.

**Zadanie 2** Załóżmy, że zbiór endomorfizmów  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$  liniowej przestrzeni  $V$  tworzy grupę ze względu na operację składania. Niech  $\psi = \varphi_1 + \dots + \varphi_k$ . Pokazać, że  $\psi^2 = \psi$ . Udowodnić, że  $\psi^2 = \psi \implies V = \ker(\psi) \oplus \text{im}(\psi)$ .

**Zadanie 3** Niech  $\varphi$  będzie automorfizmem przestrzeni wektorowej  $V$  nad ciałem  $K$ . Załóżmy, że  $\varphi \neq \pm id_V$ ,  $\varphi \neq 0$  oraz  $\varphi^2 = id$ . Udowodnić, że jeśli  $w(\varphi) = 0$  dla pewnego wielomianu  $w[x] \in K[x]$ , to  $x^2 - 1$  dzieli  $w(x)$ .

**Zadanie 4** † Niech  $n > 1$ , oraz  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)$ . Wskazać wielomian, możliwie najmniejszego stopnia, spełniający  $w(\varphi) = 0$ .

##### Wielomian charakterystyczny. Wektory i wartości własne.

**Zadanie 5** † Niech

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Znaleźć wartości własne i wektory własne nad  $\mathbb{R}$  i nad  $\mathbb{C}$ .

**Zadanie 6** Niech  $z \in \mathbb{C}$ . Uzasadnij, że macierz  $A = \text{diag}(z, \bar{z}) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$  jest podobna (nad ciałem  $\mathbb{C}$ ) do macierzy rzeczywistej  $2 \times 2$ .

**Zadanie 7** † Liczby Fibonacciego  $F_n$  definiujemy rekurencyjnie:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{dla } n \geq 2.$$

Wskazać macierz kwadratową  $A$  taką, że

$$A \cdot \begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

Znaleźć jej wartości własne i wektory własne. Podać wzór na  $A^n$  i wyprowadzić wzór na liczby Fibonacciego.

**Zadanie 8** † Znaleźć wartości własne macierzy  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{bmatrix}.$$

**Zadanie 9** Niech  $v^T = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  oraz niech  $A = v \cdot v^T \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Znaleźć wszystkie wektory własne macierzy  $A$ .

**Zadanie 10** † Niech  $\varphi : V \rightarrow V$  będzie izomorfizmem przestrzeni  $n$ -wymiarowej nad ciałem  $K$ . Wyrazić wielomian charakterystyczny  $w_{\varphi^{-1}}$  w terminach wielomianu  $w_\varphi$ .

**Zadanie 11** Niech  $V = C^\infty(\mathbb{R})$  będzie przestrzenią liniową funkcji gładkich na  $\mathbb{R}$ . Wyznaczyć wartości własne i podprzestrzenie własne endomorfizmu  $\Phi \in \text{End}(V)$  danego wzorem  $\Phi(f) = f'$ .

**Zadanie 12** Niech  $V = C^\infty(S^1)$  będzie przestrzenią liniową funkcji gładkich na  $\mathbb{R}$ , które są okresowe o okresie  $2\pi$ . Wyznaczyć wartości własne i podprzestrzenie własne endomorfizmu  $\Phi \in \text{End}(V)$  danego wzorem  $\Phi(f) = f''$ .

**Zadanie 13** † Wykazać równość wielomianów charakterystycznych  $w_{\phi\psi} = w_{\psi\phi}$  dla dowolnych  $\phi, \psi \in \text{End}(V)$  i przestrzeni  $V$  skończonego wymiaru nad  $\mathbb{R}$  lub  $\mathbb{C}$ .

**Zadanie 14** Niech  $\varphi : V \rightarrow V$  będzie endomorfizmem skończonego wymiarowej przestrzeni liniowej nad ciałem  $K$ . Pokazać, że jeżeli  $\dim(\text{im } \varphi) = k$ , to endomorfizm  $\varphi$  ma co najwyżej  $k + 1$  różnych wartości własnych.

**Zadanie 15** Niech  $V$  będzie przestrzenią skończonego wymiaru nad  $\mathbb{R}$  i niech  $\varphi : V \rightarrow V$  będzie endomorfizmem, takim, że  $\varphi^2 = -id$ . Udowodnić, że wymiar  $V$  jest podzielny przez 2.

### Diagonalizowalność

**Zadanie 16** † Udowodnić, że jeżeli przekształcenie liniowe  $\phi : V \rightarrow V$  przestrzeni liniowej nad  $K$  ma  $n = \dim V$  różnych wartości własnych i dla  $\psi : V \rightarrow V$  zachodzi  $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi$ , to istnieje baza  $V$  złożona z wektorów własnych  $\psi$ .

**Zadanie 17** Znaleźć wielomian charakterystyczny i zbadać diagonalizowalność następującej macierzy nad  $\mathbb{C}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

(Taka macierz nazywa się cykliczną.)

**Zadanie 18** Udowodnić, że macierz rozmiaru  $n \times n$  postaci  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1\dots n}$ , gdzie

$$a_{ij} = (j - i) \bmod n$$

jest diagonalizowalna nad  $\mathbb{C}$ .

**Zadanie 19** † Niech endomorfizm  $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  będzie dany wzorem

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Wykazać, że  $\varphi$  jest diagonalizowalny i znaleźć bazę złożoną z wektorów własnych.

**Zadanie 20** † Wykazać, że jeśli  $\phi : V \rightarrow V$  jest przekształceniem liniowym skończonego wymiarowej przestrzeni liniowej nad  $\mathbb{C}$  takim, że  $\phi^n = id$  dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$ , to  $\phi$  jest przekształceniem diagonalizowalnym. Czy stwierdzenie to jest prawdziwe dla przestrzeni nad ciałem liczb rzeczywistych? Czy stwierdzenie to jest prawdziwe dla przestrzeni nad dowolnym ciałem algebraicznie domkniętym?

**Zadanie 21** † Niech  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  i  $\psi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  będą przekształceniami liniowymi, które w bazach standardowych mają macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zbadać, czy istnieją bazy  $\mathbb{R}^3$  i  $\mathbb{C}^3$  odpowiednio, w których przekształcenia  $\phi$  i  $\psi$  mają macierz diagonalną.

**Zadanie 22** Zbadać diagonalizowalność (nad  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{C}$ ) macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

## GAL2\*

### Zadania na trzeci tydzień (14.03–18.03)

#### Endomorfizmy nilpotentne, podprzestrzenie niezmiennicze, rozkład Jordana

**Zadanie 1** Załóżmy, że  $V$  jest przestrzenią liniową nad ciałem  $K$ ,  $\varphi \in \text{End}(V)$  endomorfizmem nilpotentnym, a  $w \in k[x]$  pewnym wielomianem o współczynnikach w  $K$ . Pokaż, że jeśli  $w(0) = 0$  to  $w(\varphi)$  jest endomorfizmem nilpotentnym a jeśli  $w(0) \neq 0$ , to  $w(\varphi)$  jest automorfizmem.

**Zadanie 2** Pokazać, że jeśli przekształcenie  $f: V \rightarrow V$  przestrzeni liniowej nad ciałem  $K$  jest nilpotentne i  $\dim V = n$ , to  $f^n = 0$

**Zadanie 3** Niech  $A \in M_{n \times n}(K)$  i albo  $\text{char } K = 0$ , albo  $\text{char } K > n$ . Pokaż, że jeśli  $\text{tr}(A^k) = 0$  dla  $k = 1, 2, \dots, n$ , to macierz  $A$  jest nilpotentna.

**Zadanie 4** Niech  $\phi, \psi \in \text{End}(V)$  i  $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi$ . Pokaż, że  $\ker(\psi)$  jest podprzestrzenią niezmienniczą endomorfizmu  $\phi$ .

**Zadanie 5** Niech  $f$  będzie endomorfizmem  $\mathbb{R}^4$ , zadany wzorem  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_3, x_3, 0, 0)$ . Znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne. Czy istnieją  $f$  niezmiennicze podprzestrzenie dwuwymiarowe  $W, Y \subseteq \mathbb{R}^4$ , dla których  $R^4 = W \oplus Y$ ?

**Zadanie 6** Zadania rachunkowe: Znaleźć bazy w  $\mathbb{C}^n$  w których przekształcenie liniowe  $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  ma formę Jordana (i wskazać tę formę) jeżeli w bazie standardowej  $e_1, \dots, e_n$  przekształcenie ma macierz:

$$a) \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 7** Macierze  $A$  i  $B$  poniżej, mają taki sam wielomian charakterystyczny. Ustalić, czy są podobne.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Zadanie 8** Znaleźć formę Jordana macierzy nad  $\mathbb{C}$ :

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{bmatrix}.$$

**Zadanie 9** Załóżmy, że  $\text{char}(K) \neq 3$ . Niech  $\phi: K^4 \rightarrow K^4$  będzie przekształceniem zadany w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć bazę Jordana dla  $\phi$ .

**Zadanie 10** Niech  $f: V \rightarrow V$  będzie przekształceniem liniowym skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej nad  $K$ . Pokazać, że istnieją niezmiennicze podprzestrzenie  $W$  i  $U$ , takie że  $f|_W: W \rightarrow W$  jest przekształceniem nilpotentnym, a  $f|_U: U \rightarrow U$  izomorfizmem,  $V = U \oplus W$ . Pokazać, że przestrzenie  $W$  i  $U$  są wyznaczone jednoznacznie.

**Zadanie 11** Niech  $f: V \rightarrow V$  będzie przekształceniem przestrzeni skończonego wymiaru, którego macierz w postaci Jordana składa się z klatek odpowiadających różnym wartościom własnym. Pokazać, że istnieje wektor  $v \in V$  taki, że  $v, f(v), f^2(v), \dots, f^{\dim V - 1}(v)$  jest bazą.

**Zadanie 12** Dane jest przekształcenie  $\phi: K^7 \rightarrow K^7$ . Wiemy, że wartości własne  $\phi$  to 1 i 2. Ponadto wiemy, że

$$\dim(\ker(\phi - Id)) = 2, \quad \dim(\ker((\phi - Id)^2)) = 4,$$

$$\dim(\ker(\phi - 2Id)) = 1, \quad \dim(\ker((\phi - 2Id)^2)) = 2.$$

Jakiej postaci Jordana może być macierz  $\phi$ ?

**Zadanie 13** Wielomian charakterystyczny macierzy  $A$  nad  $\mathbb{R}$  jest równy  $(\lambda - 5)^5(\lambda - 1)^2$ . Ponadto

$$\dim \ker(A - 5I) = 2, \quad \dim \ker(A - 5I)^2 = 4, \quad \ker(A - I) \cap \operatorname{im}(A - I) \neq \{0\}.$$

Znaleźć formę Jordana.

**Zadanie 14** Rozpatrzmy endomorfizm  $\phi : V \rightarrow V$  przestrzeni liniowej  $V$  nad ciałem  $K$ .

(a) Niech  $W \subset V$  będzie podprzestrzenią  $\phi$ -niezmienniczą i niech  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  będą wektorami własnymi endomorfizmu  $\phi$  o parami różnych wartościach własnych. Wykazać, że jeśli zachodzi  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \in W$ , to  $\alpha_i \in W$  dla  $i = 1, \dots, k$ .

(b) Załóżmy, że jeśli  $V$  jest skończenie wymiarową przestrzenią nad ciałem algebraicznie domkniętym. Wykazać, że endomorfizm  $\phi$  jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej podprzestrzeni  $\phi$ -niezmienniczej  $W \subset V$  istnieje podprzestrzeń  $\phi$ -niezmiennicza  $W' \subset V$  taka, że  $V = W \oplus W'$ .

**GAL2\***  
**Zadania na czwarty tydzień (21.03–25.03)**  
**Formy dwuliniowe, tensory**

UWAGA: Zakładamy, że ciało bazowe  $K$  jest charakterystyki różnej od 2 a przestrzenie są skończonego wymiaru.

**Zadanie 1** Niech  $\phi(u, v)$  będzie symetryczną formą dwuliniową na  $V$ . Udowodnij, że forma  $\phi$  jest zadana przez swoje wartości na parach  $(v, v) \in V \times V$ , czyli  $\phi(v, v)$ . Czy to stwierdzenie jest prawdziwe dla formy nad ciałem o charakterystyce 2?

**Zadanie 2** Wyznacz macierz formy dwuliniowej na  $\mathbb{R}^3$  w bazie  $e'_1 = e_1 + e_2$ ,  $e'_2 = e_1 - e_2$ ,  $e'_3 = 2e_1 + e_2 + e_3$  gdy dana jest macierz w bazie standardowej  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ .

**Zadanie 3** Dana jest przestrzeń liniowa z dwuliniową formą symetryczną  $(V, \phi)$ . Dla podprzestrzeni  $W \subseteq V$  definiujemy  $W^\perp = \{v \in V : \forall w \in W \phi(w, v) = 0\}$ .

- (a) Pokaż, że  $V^\perp = \ker(\tilde{\phi} : V \rightarrow V^*)$ , gdzie  $\tilde{\phi}(v)(w) = \phi(w, v)$ .
- (b) Pokaż, że  $\dim W + \dim W^\perp = \dim V + \dim(V^\perp \cap W)$ .
- (c) Pokaż, że na przestrzeni ilorazowej  $V' = V/V^\perp$  istnieje forma dwuliniowa symetryczna  $\phi' : V' \times V' \rightarrow K$ , taka że  $\phi'(\pi(v_1), \pi(v_2)) = \phi(v_1, v_2)$ , gdzie  $\pi : V \rightarrow V'$  jest odwzorowaniem ilorazowym.
- (d) Czy powyższe punkty są prawdziwe jeśli  $\phi$  jest formą antysymetryczną?

**Zadanie 4** Załóżmy, że  $(V, \phi)$  jest przestrzenią z dwuliniową niezdegenerowaną (maksymalnego rzędu) formą symetryczną lub antysymetryczną. Dla  $v \in V \setminus \{0\}$  definiujemy  $v^\perp = \{w \in V : \phi(v, w) = 0\}$ . Przez  $\phi_v$  oznaczmy zawężenie formy  $\phi$  do  $v^\perp$ , czyli formę dwuliniową  $\phi_v : V^\perp \times V^\perp \rightarrow K$ .

- (a) Pokaż, że  $\phi_v$  jest formą niezdegenerowaną wtedy i tylko wtedy gdy  $\phi(v, v) \neq 0$ .
- (b) Pokaż, że jeśli  $\phi(v, v) = 0$ , to  $(v^\perp)^\perp = K \cdot v$ .
- (c) Pokaż, że jeśli  $\phi$  jest antysymetryczna, to  $\dim V$  jest liczbą parzystą.

**Zadanie 5** Dane macierze:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 35 & -25 \\ -25 & 35 \end{pmatrix}.$$

Które z tych macierzy są kongruentne nad  $\mathbb{Q}$ ?

**Zadanie 6** Niech  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{Q})$  będzie macierzą symetryczną i niezdegenerowaną, czyli  $\det A \neq 0$ . Udowodnij, że następujące dwie macierze są kongruentne nad  $\mathbb{Q}$ :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$$

**Zadanie 7** Niech  $(V, \phi)$  będzie niezdegenerowaną formą dwuliniową i niech  $\tilde{\phi} : V \rightarrow V^*$  będzie izomorfizmem wyznaczonym przez  $\phi$ . Pokazać, że jeśli  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  jest bazą  $V$ , taką że  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  jest bazą  $W \subseteq V$ , to  $\tilde{\phi}^{-1}(\alpha_{k+1}^*), \dots, \tilde{\phi}^{-1}(\alpha_n^*)$  jest bazą  $W^\perp$ .

---

**Zadanie 8** Z własności uniwersalnej sumy prostej i iloczynu tensorowego pokaż izomorfizm

$$V \otimes (W_1 \oplus W_2) \simeq (V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2).$$

**Zadanie 9** Wykaż, że jeśli wektory  $v_1, v_2, \dots, v_r \in W$  są liniowo niezależne, oraz  $\sum v_i \otimes w_i = 0$  w produkcie tensorowym  $V \otimes W$ , to  $w_1 = w_2 = \dots = w_r = 0$ .

**Zadanie 10** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad  $\mathbb{C}$ . Przez  $V_{\mathbb{R}}$  oznaczamy przestrzeń liniową nad  $\mathbb{R}$  równą  $V$  jako zbiór (zapominamy o mnożeniu przez  $i$ ). Ponadto przez  $\overline{V}$  oznaczamy przestrzeń liniową nad  $\mathbb{C}$ , która jako zbiór jest równa  $V$ , ale ma zdefiniowane mnożenie przez skalary zespolone:  $z \star v := \bar{z}v$ . Wskaż naturalny (nie zależący od wyboru baz) izomorfizm przestrzeni liniowych nad  $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} \otimes V_{\mathbb{R}} \simeq V \oplus \overline{V}.$$

**Zadanie 11** Forma wieloliniowa  $\phi : V^{\otimes k} \rightarrow K$  nazywa się alternująca, gdy  $\phi(v_1, v_2, \dots, v_k) = 0$  jeśli  $v_i = v_j$  dla pewnej pary  $i \neq j$ . Czy każda forma antysymetryczna jest alternująca? Czy każda forma alternująca jest antysymetryczna? Rozpatrzyć także przypadek charakterystyki ciała bazowego równej 2.

**Zadanie 12** Niech  $V$  będzie przestrzenią wektorową. Na produkcie  $n$  kopii  $V$ , czyli  $V^{\otimes n} = \overbrace{V \times \dots \times V}^n$  działa grupa  $S_n$  permutując współrzędne

$$\sigma(v_1, \dots, v_n) = (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$$

Pokaż, że w ten sposób dostajemy dobrze zdefiniowane odwzorowania liniowe produktu  $V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_n$

$$\sigma : V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n}$$

Tensor  $\kappa \in V \otimes \dots \otimes V$  nazywamy symetrycznym jeśli  $\forall \sigma \in S_n$  mamy  $\sigma(\kappa) = \kappa$  i antysymetrycznym, jeśli  $\sigma(\kappa) = \text{sgn}(\sigma)\kappa$ . Podprzestrzenie tensorów symetrycznych i antysymetrycznych oznaczamy  $Sym^n(V)$  lub  $S^n V$  i, odpowiednio,  $\bigwedge^n V$ ; oblicz ich wymiar.

**Zadanie 13** *Algebra symetryczna.* Załóżmy, że ciało bazowe  $K$  ma charakterystykę 0. Niech  $V$  będzie przestrzenią wektorową. W produkcie tensorowym  $n$  kopii  $V$ , czyli w  $V^{\otimes n}$  zdefiniujemy podprzestrzeń

$$V_n = \text{lin}\{\kappa - \sigma(\kappa) \mid \kappa \in V^{\otimes n}, \sigma \in S_n\}.$$

Niech  $\widetilde{Sym}^n(V) = V^{\otimes n}/V_n$ .

(a) Udowodnić, że złożenie włożenia i rzutowania

$$Sym^n(V) \hookrightarrow V^{\otimes n} \xrightarrow{\pi_n} \widetilde{Sym}^n(V)$$

jest izomorfizmem.

(b) Udowodnić, że mnożenie tensorów definiuje mnożenie w  $\widetilde{Sym}(V) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \widetilde{Sym}^n(V)$ , tzn istnieje działanie dwuargumentowe  $\odot$  takie, że następujący diagram jest przemienny

$$\begin{array}{ccc} V^{\otimes n} \times V^{\otimes n} & \xrightarrow{\otimes} & V^{\otimes n+m} \\ \pi_k \otimes \pi_n \downarrow & & \downarrow \pi_{k+n} \\ \widetilde{Sym}^k(V) \times \widetilde{Sym}^n(V) & \xrightarrow{\odot} & \widetilde{Sym}^{k+n}(V), \end{array}$$

przy czym mnożenie  $\odot$  jest przemienne.

(c) Wybierzmy bazę w  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  przestrzeni wektorowej  $V$ . Niech

$$\Phi : K[x_1, x_2, \dots, x_n] \longrightarrow \bigoplus_{d=0}^{\infty} Sym^d(V)$$

spełnia  $\Phi(x_i) = \alpha_i$  oraz  $\Phi(fg) = \Phi(f) \odot \Phi(g)$ . Pokaż, że  $\Phi$  jest izomorfizmem.

(d) Wskaż naturalny (niezależny od wyboru bazy) epimorfizm

$$\bigoplus_{d=0}^{\infty} Sym^d(V^*) \longrightarrow \{\text{Funkcje wielomianowe } V \rightarrow K\}.$$

**Zadanie 14** Załóżmy, że przestrzeń  $V$  ma wymiar 2 i bazę  $\alpha_1, \alpha_2$  a przestrzeń  $W$  ma wymiar  $n$  i bazę  $\beta_1, \dots, \beta_n$ . Znajdź warunki, równania na współczynniki  $a_{ij}$ , które opisują zbiór tensorów prostych w  $V \otimes W$  zapisanych jako

$$\sum_{i,j} a_{ij} \cdot (\alpha_i \otimes \beta_j)$$

**GAL2\***  
**Zadania na szósty tydzień (04.04–08.04)**  
**Formy dwuliniowe, ortogonalizacja**

Zakładamy, że ciało bazowe jest charakterystyki różnej od 2.

Jeśli  $\Phi$  jest formą symetryczną lub antysymetryczną na przestrzeni  $V$ , to podprzestrzeń  $W \subset V$  nazywamy izotropową względem  $\Phi$  (lub, równoważnie, całkowicie zdegenerowaną względem  $\Phi$ ) jeśli  $\Phi_{W \times W}$  jest formą zerową; wektor  $v \in V$  jest izotropowy jeśli  $\Phi(v, v) = 0$ .

Dwuwymiarową przestrzeń rzeczywistą z formą symetryczną zadaną w pewnej bazie przez macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nazywa się płaszczyzną hiperboliczną.

**Zadanie 1**

- a) Udowodnić, że dla  $A \in M(n \times n; K)$  jeśli  $A = -A^T$  to istnieje  $p \in K$  takie, że  $\det(A) = p^2$ , tzn. wyznacznik macierzy antysymetrycznej jest zawsze kwadratem.
- b) Dana jest  $A$  – macierz antysymetryczna o wyrazach całkowitych. Wykazać, że  $\det A$  jest kwadratem.
- c)\* Wykazać, że  $\det(A) = P(A)^2$ , gdzie  $P(A)$  jest wielomianem od wyrazów macierzy.

**Zadanie 2** Dane macierze  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  i  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Nad którymi z następujących ciał powyższe macierze są kongruentne:  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ?

**Zadanie 3** Czy istnieje macierz rzeczywista symetryczna  $4 \times 4$ , dla której znaki wyznaczników kolejnych podmacierzy kwadratowych w lewym górnym rogu są następujące: (a)  $-, +, 0, -$ ; (b)  $-, +, 0, +$ . Czy znamy sygnaturę tej macierzy?

**Zadanie 4** Dana jest przestrzeń z formą symetryczną  $(\mathbb{R}^4, \phi)$ , gdzie 2-forma  $\phi$  w bazie standardowej jest zadaną przez macierz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Znajdź bazę ortogonalną tej przestrzeni.
- (b) Znajdź  $W^\perp$ , gdzie  $W$  jest podprzestrzenią zadaną przez układ równań:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Czy  $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$ ? Czy forma  $\phi|_{W \times W}$  jest niezdegenerowana?

- (c) Znajdź stożek wektorów izotropowych.

**Zadanie 5** W przestrzeni  $W$  macierzy  $2 \times 2$  o współczynnikach rzeczywistych rozpatrujemy formę dwuliniową  $\phi(A, B) = \text{tr}(AB)$ . Znajdź największy wymiar podprzestrzeni izotropowej.

**Zadanie 6** Pokaż, że dla niezdegenerowanej formy symetrycznej  $(V, \phi)$  nad ciałem charakterystyki różnej od 2 następujące warunki są równoważne:

- (a)  $(V, \phi)$  jest sumą ortogonalną płaszczyzn hiperbolicznych
- (b) istnieje podprzestrzeń  $W \subset V$ , taka, że  $W^\perp = W$
- (c) w pewnej bazie macierz  $\phi$  ma postać:

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie  $I$  jest macierzą identyczności

(d)  $V = W_1 \oplus W_2$ , gdzie  $W_1$  i  $W_2$  są izotropowe.

W powyższym zadaniu b) przestrzeń  $W$  nie jest wyznaczona jednoznacznie.

**Zadanie 7** Niech  $(V, \phi)$  będzie rzeczywistą przestrzenią wymiaru  $2n$  z formą symetryczną. Niech  $V$  będzie sumą ortogonalną  $n$ -wymiarowych podprzestrzeni  $V_+$  i  $V_-$  takich, że  $\phi$  jest dodatnio określona na  $V_+$  i ujemnie określona na  $V_-$ . Udowodnij następujące fakty:

- (a) Każda podprzestrzeń  $(V, \phi)$  izotropowa ma wymiar nie większy niż  $n$ ;
- (b) Istnieje podprzestrzeń  $(V, \phi)$  izotropowa wymiaru  $n$ ;
- (c) Każda podprzestrzeń izotropowa jest zawarta w  $n$  wymiarowej podprzestrzeni izotropowej.

**Zadanie 8** Niech  $\omega$  będzie niezdegenerowaną 2-liniową formą antysymetryczną na przestrzeni  $V$ . Niech  $L \subset V$  będzie podprzestrzenią Lagrange'a, czyli maksymalną podprzestrzenią izotropową. Wykaż że istnieje baza przestrzeni  $V$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

taka, że wektory  $\alpha_i$  rozpinają  $L$  a wektory  $\beta_i$  rozpinają inną podprzestrzeń Lagrange'a, oraz  $\omega(\alpha_i, \beta_j) = \delta_j^i$  i  $\omega(\beta_i, \beta_j) = 0$  dla  $i \neq j$ .

**Zadanie 9** W tym zadaniu ciało bazowe to  $\mathbb{R}$ . Niech  $\Gamma$  będzie grafem nieskierowanym o wierzchołkach  $v \in I$ ; zakładamy, że w  $\Gamma$  nie ma pętli  $\overline{vv}$ . Definiujemy symetryczną formę dwuliniową na przestrzeni liniowej rozpiętej przez wierzchołki  $V = \text{lin}_{v \in I} \{e_v\}$  następującym wzorem

$$\begin{cases} f(e_v, e_v) = 2 \\ f(e_v, e_w) = -1 & \text{gdy jest krawędź } \overline{vw} \\ f(e_v, e_w) = 0 & \text{gdy nie ma krawędzi } \overline{vw} \end{cases}$$

Założmy, że tak określona forma jest dodatnio określona. Pokaż, że graf  $\Gamma$  nie ma cykli i znajdź ograniczenie na walencję wierzchołków (liczbę krawędzi wychodzących z wierzchołka)

Podpowiedź: diagramy Dynkina.

**Zadanie 10** Niech  $A$  i  $B$  będą rzeczywistymi macierzami symetrycznymi i dodatnio określonymi. Załóżmy, że wartości własne  $A$  należą do odcinka  $[a, b]$ , a wartości własne  $B$  należą do odcinka  $[c, d]$ . Wykaż, że wartości własne  $A + B$  należą do odcinka  $[a + c, b + d]$ .

**Zadanie 11** Opisz orbity działania następujących grup:

- (a) grupy  $SO_3(\mathbb{R})$  na  $\mathbb{R}^3$ ,
- (b) grupy  $SO(1, 1)$  na  $\mathbb{R}^2$ ,
- (c) grupy  $SO(1, 3)$  na  $\mathbb{R}^4$ .

**Zadanie 12** Niech  $K$  będzie dowolnym ciałem. Niech  $SO_{1,1}(K) \subset SL_2(K)$  będzie grupą specjalnych izometrii formy  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Znajdź bijekcję  $SO_{1,1}(K) \simeq K \setminus \{0\}$ .

**Zadanie 13** Niech  $V = \{X \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid \overline{X}^T = X\}$ . Dla  $A \in SL_2(\mathbb{C})$  definiujemy  $A \odot X = A X \overline{A}^T$ . W ten sposób dostajemy odwzorowanie  $SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}(V)$ . Opisz jądro tego odwzorowania, czyli

$$\{A \in SL_2(\mathbb{C}) \mid \forall X \in V \quad A \odot X = X\}.$$

## GAL2\*

### Zadania na siódmy tydzień (11.04–22.04) Przestrzenie z iloczynem skalarnym

W tej serii problemów wszystkie przestrzenie liniowe są zdefiniowane nad  $\mathbb{R}$ . Grupę ortogonalną macierzy rzeczywistych  $n \times n$  oznaczamy  $O(n)$ .

**Zadanie 1** Norma na przestrzeni  $V$  to funkcja  $V \ni v \longrightarrow \|v\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , która jest: (1) niezdegenerowana  $\|v\| = 0 \implies v = 0$ , (2) jednorodna  $\|a \cdot v\| = |a| \cdot \|v\|$ , (3) spełnia warunek trójkąta  $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$ . Udowodnić, że następujące funkcje są normami na  $\mathbb{R}^n$ :

(a)  $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$

(b)  $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$

Pokaż, że powyższe normy nie pochodzą od iloczynów skalarnych, czyli nie są postaci  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$  dla pewnego iloczynu skalarnego na  $\mathbb{R}^n$ .

**Zadanie 2** Zastosuj metodę ortogonalizacji Grama-Schmidta do bazy  $1, x, x^2, \dots, x^n$  w przestrzeni wielomianów stopnia  $\leq n$  z iloczynem skalarnym

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)dx$$

Wielomiany  $\tilde{P}_m$  z tak uzyskanej bazy ortonormalnej nazywamy wielomianami Legendre'a (a ściślej wielomiany  $P_m = \sqrt{\frac{2}{2m+1}} \tilde{P}_m$  nazywamy wielomianami Legendre'a).

(a) Znajdź kilka pierwszych wielomianów Legendre'a i pokaż formułę rekurencyjną

$$P_{m+1}(x) = \frac{2m+1}{m+1} \cdot xP_m(x) - \frac{m}{m+1} P_{m-1}(x)$$

(b) Pokaż formułę Rodrigues'a

$$P_m = \frac{1}{2^m m!} \cdot \left( (x^2 - 1)^m \right)^{(m)}$$

#### Zadanie 3

(a) Wykazać że forma 2-liniowa  $\phi(A, B) = -\text{tr}(AB)$  jest iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej rzeczywistych macierzy antysymetrycznych  $n \times n$ .

(b) Niech  $C \in O(n)$ . Wykazać, że jeśli  $A$  jest macierzą antysymetryczną, to  $CAC^{-1}$  też jest macierzą antysymetryczną. Ponadto  $A \mapsto CAC^{-1}$  jest izometrią przestrzeni macierzy antysymetrycznych ze względu na formę  $\phi$ .

**Zadanie 4** Niech  $V$  będzie przestrzenią euklidesową i  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  układem wektorów w  $V$ .

(a) Pokaż, że dla wyznaczników Grama zachodzi równość

$$W(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = W(\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}) \cdot \|\alpha_r - p_U(\alpha_r)\|^2$$

gdzie  $p_U : W \longrightarrow U = \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1})$  jest rzutem prostopadłym.

(b) Pokaż, że jeśli  $p_W : V \longrightarrow U$  jest rzutem prostopadłym na podprzestrzeń  $U \subset V$ , to wyznacznik Grama spełnia nierówność

$$W(p_U(\alpha_1), \dots, p_U(\alpha_r)) \leq W(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$$

(c) Pokaż, że wyznacznik Grama spełnia nierówność:

$$W(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) \leq W(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \cdot W(\beta_1, \dots, \beta_s)$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy  $(\alpha_i, \beta_j) = 0$  dla dowolnych  $1 \leq i \leq r$ ,  $1 \leq j \leq s$  lub co najmniej jeden z układów  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_s$  jest liniowo zależny.

**Zadanie 5** Niech  $v_1, v_2, v_3, v_4$  będą wektorami w przestrzeni euklidesowej  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Pokazać, że jeśli  $\langle v_i, v_j \rangle < 0$  dla wszystkich par  $i \neq j$ , to pewne trzy z tych wektorów są liniowo niezależne.

**Zadanie 6** Pokazać, że jeśli w liniowej przestrzeni z iloczynem skalarnym  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  jest bazą ortonormalną zaś  $\beta_1, \dots, \beta_n$  jest układem wektorów takim, że

$$\sum_{i=1}^n \|\beta_i\|^2 < 1$$

to układ  $\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n$  jest liniowo niezależny.

**Zadanie 7** Wykazać, że jeśli  $A$  jest macierzą izometrii  $f$  w bazie ortonormalnej, to  $f$  jest symetrią wtedy i tylko wtedy gdy macierz  $A$  symetryczna.

**Zadanie 8** Przekształcenie przestrzeni z iloczynem skalarnym zadane jest, w kanonicznej bazie ortonormalnej  $e_1, e_2, e_3$  macierzą:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Przedstawić to przekształcenie w postaci złożenia co najwyżej trzech symetrii prostopadłych względem płaszczyzn.

**Zadanie 9** Rozpatrujemy  $\mathbb{R}^4$  ze standardowym iloczynem skalarnym. Znaleźć macierz w bazie standardowej (i wzór analityczny) opisujący rzut prostopadły na podprzestrzeń

$$W = \text{lin}\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3)\}.$$

**Zadanie 10** Przekształcenie ortogonalne  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  przestrzeni ze standardowym iloczynem skalarnym ma w standardowej bazie ortonormalnej macierz:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sprawdzić, że jest to izometria. Opisać geometrycznie czym jest to przekształcenie: przedstawić  $\mathbb{R}^4$  jako sumę niezmienniczych przestrzeni prostopadłych,  $V_1 \oplus V_2$  tak, że  $f$  jest w jednej przestrzeni obrotem, a w drugiej symetrią.

**Zadanie 11** Niech  $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  będzie macierzą ortogonalną i  $\det A = 1$ . Pokazać, że

$$(\text{tr} A)^2 - \text{tr} A^2 = 2 \text{tr} A.$$

Wsk: skorzystać z tego że  $A$  jest macierzą obrotu i wykorzystać wzory trygonometryczne.

**Zadanie 12** Pokazać, że jeśli przekształcenie liniowe przestrzeni z iloczynem skalarnym  $f: V \rightarrow V$  zachowuje kąty (a ściślej  $\cos(\angle(\alpha, \beta))$  dla dowolnej pary wektorów), to  $f$  jest postaci  $cg$ , gdzie  $c$  jest stałą, a  $g$  przekształceniem ortogonalnym (izometrią).

**GAL2\***  
**Zadania na ósmy tydzień (25.04–29.04)**  
**Przekształcenia samosprężone i twierdzenie spektralne**

Rozważamy euklidesowe przestrzenie liniowe, tzn. przestrzenie skończonego wymiaru nad  $\mathbb{R}$  z iloczynem skalarnym. Wszystkie macierze mają rzeczywiste współczynniki.

Przypomnijmy, że jeśli  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  jest przestrzenią euklidesową to iloczyn skalarny wyznacza izomorfizm  $V \ni v \rightarrow (w \rightarrow \langle w, v \rangle) \in V^*$ , który oznaczmy  $\eta : V \rightarrow V^*$ .

**Zadanie 1** Załóżmy, że  $\phi, \psi \in \text{End}(V)$  są przekształceniami samosprężonymi. Wykaż, że

- (a) kombinacja liniowa przekształceń  $\phi$  i  $\psi$  jest przekształceniem samosprężonym,
- (b)  $\phi \circ \psi + \psi \circ \phi$  jest przekształceniem samosprężonym,
- (c)  $\phi \circ \psi$  jest przekształceniem samosprężonym wtedy i tylko wtedy, gdy  $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$
- (d)  $\ker \phi \perp \text{im } \phi$  oraz  $V = \ker \phi \oplus \text{im } \phi$ .

**Zadanie 2** Twierdzenie spektralne w praktyce: dla podanej macierzy  $A$  znajdź macierz ortogonalną  $B$  taką, że  $B^T A B$  jest macierzą diagonalną.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Zadanie 3 Pierwiastek macierzy** Mówimy, że endomorfizm  $\varphi \in \text{End}(V)$  jest dodatnio określony jeśli jest samosprężony i dla każdego niezerowego  $v \in V$  mamy  $\langle \varphi(v), v \rangle > 0$ . Macierz symetryczna jest dodatnio określona jeśli definiuje dodatnio określoną formę symetryczną.

- (a) Pokaż, że  $\varphi$  jest dodatnio określony wtedy i tylko wtedy gdy jego macierz w bazie ortonormalnej  $V$  jest symetryczna i zdefiniowana przez nią forma symetryczna jest dodatnio określona.
- (b) Pokaż, że jeśli  $\varphi \in \text{End}(V)$  jest dodatnio określony to istnieje  $\psi \in \text{End}(V)$  dodatnio określony taki, że  $\psi^2 = \varphi$ .
- (c) Pokaż, że dla każdej dodatnio określonej macierzy symetrycznej  $A$  istnieje macierz  $B$  o takich samych własnościach, taka że  $A = B^2$ .

**Zadanie 4 Rozkład biegunowy.** Pokaż, że dla każdej odwracalnej macierzy  $M$  istnieje dodatnio określona macierz symetryczna  $B$  oraz macierz ortogonalna  $C$  takie, że  $M = BC$  (Takie przedstawienie  $M$  nazywamy rozkładem biegunowym  $M$ .) Pokaż, że macierze  $B$  i  $C$  są wyznaczone jednoznacznie.<sup>I</sup>

**Zadanie 5** Znajdź rozkład biegunowy macierzy  $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Zadanie 6 SVD Rozkład według wartości osobliwych** Pokaż, że dla dowolnej macierzy odwracalnej  $M$  istnieją macierze  $C_1, C_2 \in O(n)$  oraz macierz diagonalna taka, że  $M = C_1 D C_2$ . Takie przedstawienie nazywamy rozkładem SVD. Korzystając z przypadku kiedy  $M$  jest odwracalna dowiedz istnienie rozkładu SVD dla dowolnej macierzy  $M$ .<sup>II</sup>

**Zadanie 7** Niech  $\varphi$  będzie przekształceniem samosprężonym przestrzeni euklidesowej  $V = \mathbb{R}^n$  ze standardowym produktem skalarnym. Przez  $S^{n-1}$  oznaczmy sferę jednostkową  $S^{n-1} = \{v : \|v\| = 1\}$ . Wiadomo, że każda funkcja ciągła rzeczywista na  $S^{n-1}$  przyjmuje swoje minima i maksima. Połóżmy  $f(v) = \langle \varphi(v), v \rangle$ . Wykaż co następuje

- (a) Jeżeli  $\lambda_1$  jest minimum funkcji  $f$  na sferze jednostkowej przyjmowanym w punkcie  $\alpha_1$ , to  $\alpha_1$  jest wektorem własnym o wartości własnej  $\lambda_1$ .<sup>III</sup>

- (b) Przestrzeń  $\text{lin}\{\alpha_1\}^\perp$  jest  $\varphi$  niezmiennicza i opisana w poprzednim punkcie procedura stosowana indukcyjnie prowadzi do znalezienia ciągu rosnącego wartości własnych  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  i odpowiadających im wektorów własnych.

**Zadanie 8** Udowodnić, że przekształcenia samosprężone  $\phi$  i  $\psi$  przestrzeni euklidesowej są przemienne, czyli  $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ , wtedy i tylko wtedy, gdy posiadają wspólną ortonormalną bazę wektorów własnych.

**Zadanie 9** Znaleźć wspólną bazę ortonormalną (względem standardowego iloczynu skalarnego w  $\mathbb{R}^4$ ) złożoną z wektorów własnych obu poniższych macierzy:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Zadanie 10** Niech  $\varphi : V \longrightarrow V$  będzie endomorfizmem przestrzeni euklidesowej spełniającym  $\varphi^2 = 0$ . Połóżmy  $\tilde{\varphi} = \eta^{-1} \circ \varphi^* \circ \eta$ , gdzie  $\eta : V \longrightarrow V^*$  jest izomorfizmem wyznaczonym przez produkt skalarny a  $\varphi^* : V^* \longrightarrow V^*$  jest sprzężeniem  $\varphi$ . Niech  $\delta = \tilde{\varphi} \circ \varphi + \varphi \circ \tilde{\varphi}$ . Wykaż co następuje

- (a)  $\ker(\delta) = \ker(\varphi) \cap \ker(\tilde{\varphi})$   
 (b)  $V = \ker(\delta) \oplus \text{im}(\varphi) \oplus \text{im}(\tilde{\varphi})$  oraz ten rozkład jest ortogonalny.

# GAL2<sup>\*</sup>

## Zadania na dziewiąty tydzień (09.05–13.05)

### Przekształcenia ortogonalne i unitarne

W tej serii zadań przestrzenie są skończonego wymiaru nad  $\mathbb{R}$  lub  $\mathbb{C}$ .

**Zadanie 1** Niech  $V$  będzie przestrzenią wektorową nad  $\mathbb{C}$  z iloczynem hermitowskim. Przez  $\bar{V}$  oznaczamy tę samą przestrzeń (jako zbiór) z mnożeniem przez  $z \in \mathbb{C}$  zadanym formułą  $z \odot v = \bar{z}v$ . Znajdź izomorfizm  $\bar{V} \xrightarrow{\sim} V^*$ , który nie zależy od wyboru bazy a jedynie od iloczynu hermitowskiego.

**Zadanie 2** Niech  $V$  będzie parzystowymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową z formą antysymetryczną  $\omega$  maksymalnego rzędu. Udowodnij, że na  $V$  istnieje struktura zespolona oraz iloczyn hermitowski takie, że  $\omega(v, w) = -\operatorname{im}(\langle v | w \rangle)$ .

**Zadanie 3** Niech  $\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$  będzie macierzą struktury zespolonej na  $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$  w bazie

$$e_1, e_2, \dots, e_n, ie_1, ie_2, \dots, ie_n.$$

Rozważamy  $U(n)$  i  $GL_n(\mathbb{C})$  jako podgrupy  $GL_{2n}(\mathbb{R})$  oraz standardowe podgrupy  $O_{2n}(\mathbb{R})$  i  $Sp_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}$ . Wykaż następujące równości

- (a)  $GL_n(\mathbb{C}) \cap Sp_n(\mathbb{R}) = U(n)$ ,
- (b)  $GL_n(\mathbb{C}) \cap O_{2n}(\mathbb{R}) = U(n)$ ,
- (c)  $O_{2n}(\mathbb{R}) \cap Sp_n(\mathbb{R}) = U(n)$ .

**Zadanie 4** Niech  $(V, \langle \mid \rangle)$  będzie przestrzenią hermitowską wymiaru  $n$  nad  $\mathbb{C}$ .

- (a) Pokaż, że część rzeczywista iloczynu hermitowskiego, czyli  $\operatorname{re}(\langle \mid \rangle)$ , jest iloczynem skalarnym na  $V$  jako przestrzeni wymiaru  $2n$  nad  $\mathbb{R}$ , którą oznaczmy przez  $V_{\mathbb{R}}$ . Pokaż, że  $\operatorname{im}(\langle \mid \rangle)$  jest antysymetryczną formą dwuliniową na  $V_{\mathbb{R}}$  maksymalnego rzędu.
- (b) Załóżmy, że dany jest iloczyn skalarny  $\langle \mid \rangle$  na  $V_{\mathbb{R}}$ , który jest zachowany przez strukturę zespoloną, czyli  $\langle i \cdot v_1, i \cdot v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ . Czy istnieje iloczyn hermitowski  $\langle \mid \rangle$  na  $V$ , taki że  $\operatorname{re}(\langle \mid \rangle) = \langle \mid \rangle$ ?
- (c) Załóżmy, że  $\omega$  jest dwuliniową rzeczywistą formą antysymetryczną na  $V_{\mathbb{R}}$ , taką że  $\omega(i \cdot v_1, i \cdot v_2) = \omega(v_1, v_2)$ . Czy istnieje iloczyn hermitowski na  $V$ , taki że  $\operatorname{im}(\langle \mid \rangle) = \omega$ ?

**Definicja:** Niech  $V$  i  $W$  będą zespolonymi skończonego wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi z iloczynami hermitowskim. Dla  $\varphi \in L(V, W)$  definiujemy  $\varphi^* \in L(W, V)$  za pomocą tożsamości

$$\langle \varphi(v) \mid w \rangle_W = \langle v \mid \varphi^*(w) \rangle_V.$$

**Zadanie 5** Wykaż, że powyższa definicja jest dobra, czyli jednoznacznie wyznacza  $\varphi^*$ . Wykaż, że jeśli  $\mathcal{A}$  jest bazą ortonormalną w  $V$  oraz  $\mathcal{B}$  jest bazą ortonormalną w  $W$  to

$$M(\varphi^*)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \overline{(M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T}.$$

**Zadanie 6** Niech  $V$  będzie i  $\varphi \in \operatorname{End}(V)$  endomorfizmem takim, że  $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$ . Pokaż, że  $\varphi$  jest diagonalizowalny w bazie ortonormalnej. Jeśli  $\varphi = \varphi^*$ , to endomorfizm  $\varphi$  nazywamy samosprężonym; pokaż, że wówczas wartości własne  $\varphi$  są rzeczywiste.

**Zadanie 7** Sprawdź, że macierze

$$(a) \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{bmatrix} \quad (b) \quad \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{bmatrix}$$

są unitarne i znajdź bazy przestrzeni  $\mathbb{C}^3$  i  $\mathbb{C}^4$  składające się z ich wektorów własnych.

**Zadanie 8** Na  $\mathbb{C}^2$  weźmy standardową strukturę przestrzeni unitarnej. Endomorfizm  $\phi \in \text{End}(\mathbb{C}^2)$  jest zadany macierzą

$$\begin{bmatrix} 4 + 2i & 5 + 4i \\ 4 + 3i & 2 \end{bmatrix}$$

Przedstaw  $\phi$  jako złożenie  $\psi \circ \eta$ , gdzie  $\psi$  jest samosprężone a  $\eta$  unitarne.

**Zadanie 9** Przekształcenie przestrzeni euklidesowej zadane jest w bazie ortonormalnej macierzą:

$$(a) \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad (b) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Znajdź bazę ortogonalną, w której to przekształcenie ma postać klatkowo-diagonalną z klatkami wymiaru nie większego niż  $2 \times 2$ .

**Zadanie 10** Dla macierzy o wyrazach zespolonych przez  $A^*$  oznaczamy macierz  $\overline{A}^T$ .

- (a) Dla dowolnej macierzy  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$  definiujemy  $\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ . Pokaż, że ta definicja jest dobra, czyli ten szereg jest zbieżny do macierzy w  $M_{n \times n}(\mathbb{C})$
- (b) Pokaż, że  $\exp(A)$  jest zawsze macierzą odwracalną.
- (c) Udowodnij, że jeśli  $A = -A^*$ , to  $\exp(A) \in U(n)$ .
- (d) Wykaż, że jeśli  $B \in U(n)$ , to istnieje macierz  $A = -A^*$  taka, że  $B = \exp(A)$ .

**Zadanie 11** Niech

$$V = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid A = A^*, \text{tr}(A) = 0\} = \text{lin}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sprawdź, że  $\exp(iA) \in SU(2)$  dla  $A \in V$ . Zbadaj obrazy prostych  $\exp(itA)$  dla macierzy  $A$  takich jak powyżej.

# GAL2<sup>\*</sup>

## Zadania na dziesiąty tydzień (16.05–20.05)

### Kwaterniony, przestrzenie afiniczne

**Kwaterniony**, przypomnienie: Standardową  $\mathbb{R}$ -bazę w kwaternionach  $\mathbb{H}$  oznaczamy przez  $1, i, j, k$ . Rozważamy iloczyn skalarny  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  w  $\mathbb{H}$ , dla którego to jest baza ortonormalna. Przestrzeń czystych kwaternionów rozpiętą przez  $i, j, k$  oznaczamy przez  $\Im$ .

**Iloczyn wektorowy**, definicja: Rozważamy  $\mathbb{R}^3$  ze standardowym iloczynem skalarnym oraz standardową orientacją. Niech  $vol = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$  (forma ta zależy tylko od iloczynu skalarnego i orientacji). Definiujemy iloczyn wektorowy  $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  formułą

$$\langle u, v \times w \rangle \cdot vol = u \wedge v \wedge w \quad \text{dla} \quad u, v, w \in \mathbb{R}^3.$$

**Zadanie 1** Zauważ, że każdy kwaternion można zapisać  $x = r \cdot A$ , gdzie  $r = \|x\|$  oraz  $A \in SU(2)$ . Wykazać, że iloczyn skalarny w kwaternionach spełnia tożsamość

$$2 \cdot \langle x, y \rangle = \text{tr}(x \cdot y^*)$$

**Zadanie 2** Pokaż, że jeśli  $q_1, q_2 \in \Im$ , to

$$q_1 \cdot q_2 = -\langle q_1, q_2 \rangle + q_1 \times q_2$$

gdzie  $\langle q_1, q_2 \rangle$  to iloczyn skalarny w  $\mathbb{R}^3 \simeq \Im$ , a  $q_1 \times q_2$  to iloczyn wektorowy dla bazy  $i, j, k$ .

**Zadanie 3** Pokaż, że

$$\left\{ q \in \mathbb{H} : \forall_{q' \in \mathbb{H}} \quad q \cdot q' = q' \cdot q \right\} = \mathbb{R} \cdot 1$$

**Zadanie 4** Pokaż, że jeśli  $a$  i  $b$  są liczbami całkowitymi będącymi sumami czterech kwadratów liczb całkowitych, to iloczyn  $ab$  też jest sumą czterech kwadratów.

**Oktoniony**. Definiujemy funkcję  $\star : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  wzorem

$$(a, b) \star (c, d) = (ac - d^*b, da + bc^*)$$

$$\text{for } h \in \mathbb{H} \quad h := (h, 0) \quad \ell := (0, 1)$$

Definiujemy  $(a, b)^\# = (a^*, -b)$ . Parę  $(\mathbb{H}^2, \star)$  nazwiemy oktonionami z mnożeniem  $\star$  i sprzężeniem  $^\#$ .

**Zadanie 5** Sprawdź następujące własności zdefiniowanych powyżej pojęć

- (a)  $\star$  jest odwzorowaniem  $\mathbb{R}$ -dwuliniowym i jego obcięcie do  $\mathbb{H} \times 0$  jest mnożeniem w kwaternionach.
- (b) Element  $(1, 0)$  jest neutralny dla  $\star$ , czyli  $(1, 0) \star (a, b) = (a, b) \star (1, 0) = (a, b)$ .
- (c) Dla  $v \in \mathbb{H}^2$  produkt  $v \star v^\# \in \mathbb{H}^2$  jest postaci  $(r, 0)$ , gdzie  $r \in \mathbb{R} \subset \mathbb{H}$ .
- (d) Dla każdego niezerowego elementu  $v \in \mathbb{H}^2$  istnieje  $w$  taki, że  $v \star w = w \star v = (1, 0)$ .

Rozstrzygnij czy mnożenie  $\star$  jest łączne, czyli czy dla każdej trójki  $v_i \in \mathbb{H}^2$  zachodzi  $(v_1 \star v_2) \star v_3 = v_1 \star (v_2 \star v_3)$ ?

**Przestrzenie afiniczne**, przypomnienie: Rozważamy przestrzenie afiniczne  $E$  z przestrzenią styczną  $T(E)$ , gdzie  $T(E)$  jest przestrzenią liniową skończonego wymiaru nad ciałem  $K$ . Dla zbioru  $X \subset E$  przez  $af(X)$  rozumiemy podprzestrzeń afiniczną rozpiętą przez  $X$ . Dla prostej rozpiętej przez dwa punkty  $p \neq q$  piszemy  $L(p, q)$ . Dla przestrzeni liniowej  $V$  mamy standardową strukturę przestrzeni afinicznej na  $V$ . Jeśli  $V = K^n$ , to przez  $[a_1, \dots, a_n]$  oznaczmy punkt w przestrzeni afinicznej a przez  $(a_1, \dots, a_n)$  wektor w jej przestrzeni stycznej.

**Zadanie 6** Znajdź bazę punktową podprzestrzeni  $K^3$  opisaną równaniem

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4$$

**Zadanie 7** Niech  $p = [-1, -1, 1] \in \mathbb{R}^3$  i  $L = [2, 3, 5] + \text{lin}\{(1, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ .

- (a) Znajdź równanie płaszczyzny w  $H \subset \mathbb{R}^3$  zawierającej punkt  $p$  i prostą  $L$ .
- (b) Niech prosta  $L'$  będzie opisana układem równań

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17 \end{cases}$$

Sprawdź, że istnieje prosta  $K \subset \mathbb{R}^3$  zawierająca  $p$  i przecinająca proste  $L$  oraz  $L'$  i znajdź punkty przecięcia prostej  $K$  z prostymi  $L$  i  $L'$ .

**Zadanie 8** W przestrzeni afinicznej  $\mathbb{R}^4$  znajdź przedstawienie parametryczne oraz układ równań opisujący podprzestrzeń afiniczną rozpiętą przez następujące punkty:

- a)  $[-1, 1, 0, 1]$ ,  $[0, 0, 2, 0]$ ,  $[-3, -1, 5, 4]$ ,  $[2, 2, -3, -3]$
- b)  $[1, 1, 1, -1]$ ,  $[0, 0, 6, -7]$ ,  $[2, 3, 6, -7]$ ,  $[3, 4, 1, -1]$

Przestrzeń tę przedstaw jako przecięcia hiperpłaszczyzn w  $\mathbb{R}^4$ . (Hiperpłaszczyzna = przestrzeń kowymiaru jeden.)

**Zadanie 9** Sformułuj i udowodnij twierdzenie Talesa w przestrzeni afinicznej nad ciałem  $K$ .

**Zadanie 10** Mówimy, że układ czterech punktów  $p, q, r, s \in E$  jest równoległobokiem gdy  $\vec{p}\vec{q} = -\vec{r}\vec{s}$ . Udowodnij, że jeśli  $\text{char}(K) \neq 2$ , to mamy wówczas równość kombinacji afinicznych

$$\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}s$$

**Zadanie 11** Twierdzenie Menelaosa. Dane sześć różnych punktów  $a, b, c, p, q$  i  $r$  w przestrzeni afinicznej nad  $K$ . Przypuśćmy, że punkty  $p, q$  i  $r$  leżą odpowiednio na prostych  $L(b, c)$ ,  $L(c, a)$  i  $L(a, b)$  oraz

$$p = \lambda b + (1 - \lambda)c \quad q = \mu c + (1 - \mu)a \quad r = \nu a + (1 - \nu)b$$

dla  $\lambda, \mu, \nu \in K$ . Udowodnij, że punkty  $p, q, r$  są współliniowe (czyli leżą na jednej prostej afinicznej) wtedy i tylko wtedy gdy  $\lambda\mu\nu = (\lambda - 1)(\mu - 1)(\nu - 1)$ .

**Zadanie 12** Niech  $E_1 = p + V_1$ ,  $E_2 = q + V_2$  będą podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej  $E$ , gdzie  $E_1, E_2 \subset T(E)$ . Udowodnij, że:

- (a)  $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset \iff \vec{p}\vec{q} \in V_1 + V_2$
- (b) jeśli  $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$  to  $\dim\langle E_1 \cup E_2 \rangle = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$
- (c) jeśli  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , to  $\dim\langle E_1 \cup E_2 \rangle = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim V_1 \cap V_2 + 1$ .

**Zadanie 13** Niech  $E_1, E_2$  będą dwoma podprzestrzeniami afinicznymi w przestrzeni afinicznej  $E$  nad ciałem  $K$ . Opisz zbiór

$$\left\{ \lambda \cdot p + (1 - \lambda) \cdot q : p \in E_1, q \in E_2, \lambda \in K \right\}$$

**Zadanie 14** Niech  $E_1 = p + V_1$ ,  $E_2 = q + V_2$  będą dwiema skośnymi podprzestrzeniami w przestrzeni afinicznej; skośnymi, czyli spełniającymi następujące warunki:  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$  i  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ .

- (a) Pokaż, że dla każdego punktu  $x \notin E_1 \cup E_2$  istnieje co najwyżej jedna prosta  $P$  przechodząca przez punkt  $x$  i przecinająca  $E_1$  i  $E_2$ .
- (b) Pokaż, że taka prosta istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \in \text{af}(E_1 \cup E_2)$  ale  $\vec{p}\vec{x}, \vec{q}\vec{x} \notin V_1 + V_2$ .

## GAL2\*

### Zadania na jedenasty tydzień (23.05–27.05)

#### Przekształcenia afiniczne i przestrzenie afiniczne euklidesowe

Mówimy, że punkt  $p \in X$  jest stałym dla przekształcenia  $\varphi : X \rightarrow X$  gdy  $\varphi(p) = p$ . Zbiór  $A \subset X$  jest niezmienniczy ze względu na przekształcenie  $\varphi$  gdy  $\varphi(A) \subset A$ .

**Zadanie 1** W przestrzeni afinicznej  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$  podprzestrzeń  $H$  zadana jest równaniami:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Niech  $\pi$  będzie rzutem wzdłuż  $\text{lin}\{(1, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 0)\}$  na  $H$ .

- (a) Znajdź przeciwobraz prostej  $L = [1, 0, 1, 0] + \text{lin}(1, -1, 1, 1)$ .
- (b) Znajdź układ równań opisujący obraz płaszczyzny  $M = [1, 0, 1, 0] + \text{lin}\{(1, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ .

**Zadanie 2** Niech  $f : \mathbb{A}_K^n \rightarrow \mathbb{A}_K^n$  będzie przekształceniem afinicznym. Załóżmy, że 1 nie jest wartością własną  $T(f)$ . Udowodnij, że  $f$  ma dokładnie jeden punkt stały.

**Zadanie 3** Niech  $f : \mathbb{A}_K^n \rightarrow \mathbb{A}_K^n$  będzie przekształceniem afinicznym, które ma dokładnie jeden punkt stały  $p_0$ . Pokaż, że każda podprzestrzeń niezmiennicza przekształcenia  $f$  zawiera  $p_0$ .

**Zadanie 4** Niech  $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  będzie przekształceniem afinicznym. Wykazać, że jeśli  $f$  przeprowadza parę prostych skośnych na parę prostych równoległych, to  $f$  nie jest różnowartościowe. Podać przykład takiego przekształcenia.

**Zadanie 5** Niech  $N, L, M \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  będzie trójką prostych parami skośnych. Czy każdą taką trójkę można przekształcić na dowolną inną za pomocą automorfizmu afinicznego? Jeśli nie, to podać warunek na to, żeby dla dwóch trójek prostych jak wyżej istniało przekształcenie afiniczne  $f$  takie, że  $f(N) = N'$ ,  $f(L) = L'$ ,  $f(M) = M'$ .

**Zadanie 6** Dane są proste  $E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, F_3$  w  $\mathbb{A}_K^3$  takie, że

$$T(E_1) + T(E_2) + T(E_3) = T(F_1) + T(F_2) + T(F_3) = T(\mathbb{A}_K^3)$$

oraz

$$E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = F_1 \cap F_2 = F_1 \cap F_3 = F_2 \cap F_3 = \emptyset.$$

Zbadaj, czy istnieje izomorfizm afiniczny  $f : \mathbb{A}_K^3 \rightarrow \mathbb{A}_K^3$  taki, że  $f(E_i) = F_i$  dla  $i = 1, 2, 3$ .

**Zadanie 7** Znaleźć warunki konieczne i dostateczne na to, by by zbiór liczb dodatnich  $\{a_{ij}\}$  był

- (a) zbiorem odległości wszystkich możliwych par wierzchołków  $n$  wymiarowego niezdegenerowanego sympleksu w przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^n$ ,
- (b) zbiorem odległości wszystkich możliwych par punktów pewnego zbioru  $n + 1$  punktów przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^n$  (to znaczy nie zakładamy tak jak w a), że punkty są w położeniu ogólnym).

**Zadanie 8** Ustalmy  $k$  i  $n$  takie, że  $0 < k < n$ . Niech  $f : E \rightarrow E$  będzie przekształceniem afinicznym przestrzeni euklidesowej wymiaru  $n$  zachowującym objętość równoległoscianów  $k$ -wymiarowych. Pokaż, że  $f$  jest izometrią.

**Zadanie 9** Udowodnij, że odległość  $\rho(x_0, H)$  punktu  $x_0$  od podprzestrzeni afinicznej  $H = y_0 + T(H)$ , gdzie  $T(H) = \text{lin}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ , można wyrazić przy pomocy wyznacznika Grama  $G$ :

$$(\rho(x_0, H))^2 = \frac{G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \overrightarrow{x_0 y_0})}{G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)},$$

**Zadanie 10** W afinicznej przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$  ze standardowym iloczynem skalarnym znajdź odległość punktu  $[4, 2, -5, 1]$  od podprzestrzeni opisanej przez układ równań:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 12. \end{aligned}$$

**Zadanie 11** Niech  $H$  i  $K$  będą podprzestrzeniami euklidesowej przestrzeni afinicznej  $E$  i niech  $H \cap K = \emptyset$ . Pokaż, że istnieje prosta  $L$  taka, że  $L \perp H$ ,  $L \perp K$ , i  $L$  ma punkty wspólne z  $H$  i z  $K$ .

**Zadanie 12** W afinicznej przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^5$  ze standardowym iloczynem skalarnym znajdź miejsce geometryczne punktów, przez które można przeprowadzić prostą przecinającą płaszczyzny  $P_1$  i  $P_2$  i będącą do nich prostopadłą

$$P_1 : [2, 2, 2, 4, 5] + \text{lin}\{(1, 0, -1, 0, 0), (0, 1, 0, -1, 0)\}$$

$$P_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 15 \\ x_2 + 2x_3 = 11 \\ -x_2 - 2x_4 + 2x_5 = -1 \end{cases}$$

Znajdź odległość  $P_1$  od  $P_2$ .

**Zadanie 13** W przestrzeni afinicznej euklidesowej  $\mathbb{R}^4$  dane są proste  $L = \{[0, 7, 1, 2] + t(0, 1, -1, 0)\}$  oraz  $K = \{[1, 1, 1, 1] + t(1, 0, 0, -1)\}$ . Znajdź płaszczyznę przechodzącą przez punkt  $[4, 1, 3, 1]$ , która jest prostopadła do  $L$  i nie przecina  $K$ .

## GAL2\*

### Zadania na dwunasty tydzień (30.05–06.06) Przestrzenie rzutowe i kwadryki

Jeśli nie jest powiedziane inaczej, to zakładamy, że ciało  $K$  jest nieskończone i  $\text{char } K \neq 2$ . Mapa afiniczna na przestrzeni  $\mathbb{P}_K^n$ , to układ współrzędnych jednorodnych  $(x_0 : \dots : x_n)$  i izomorfizm

$$U_i = \{x_i \neq 0\} \ni [x_0 : \dots : x_n] \xrightarrow{\psi_i} \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \in \mathbb{A}_K^n$$

dla pewnego  $i$ .

**Zadanie 1** Niech  $f : K^{n+1} \rightarrow K$  będzie funkcją liniową. Podzbiór  $U_f = \mathbb{P}_K^n \setminus V(f)$  nazywamy otoczeniem afinicznym. Udowodnić, że przekształcenie

$$\{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in K^{n+1} \mid f(x_0, x_1, \dots, x_n) = 1\} \rightarrow U_f, \quad (x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : x_1 : \dots : x_n]$$

jest bijekcją. Udowodnij, że dla każdego skończonego zbioru punktów w przestrzeni rzutowej istnieje otoczenie afiniczne, która zawiera te punkty.

**Zadanie 2** Wykaż, że dowolną  $k$ -wymiarową podprzestrzeń liniową w  $\Lambda^k \subseteq \mathbb{P}_K^n$  można pokryć  $k+1$  mapami afinicznymi (czyli przestrzeń  $\Lambda^k$  zawarta jest w teoriomnogościowej sumie ich dziedzin), ale nie można jej pokryć mniejszą liczbą takich map.

**Zadanie 3** Pokaż, że na płaszczyźnie rzutowej każde dwie proste przecinają się w jednym punkcie lub są równe. Uogólnij to stwierdzenie na wyższe wymiary.

**Zadanie 4** Niech  $K$  będzie ciałem algebraicznie domkniętym,  $L \subset \mathbb{P}_K^n$  będzie prostą rzutową oraz  $D \subset \mathbb{P}_K^n$  hiperpowierzchnią stopnia  $d$ . Wykaż, że  $L \cap D \neq \emptyset$ . Załóżmy dodatkowo, że  $L \not\subset D$ ; ile maksymalnie może być punktów w  $L \cap D$ ?

**Zadanie 5** Niech  $K$  będzie dowolnym ciałem. Weźmy  $Q_1 = V(xy - z^2) \subset \mathbb{P}_K^2$ . Pokaż bijekcję  $Q \simeq \mathbb{P}_K^1$ . Niech  $Q_1 = V(xy - zw = 0) \subset \mathbb{P}_K^3$ . Pokaż bijekcję  $Q_2 \simeq \mathbb{P}_K^1 \times \mathbb{P}_K^1$ .

**Zadanie 6** Ile różnych prostych rzutowych przecina jednocześnie cztery poniższe proste w  $\mathbb{P}_K^3$  opisane we współrzędnych jednorodnych równaniami:

$$\begin{aligned} L_1 : x = y = 0, \\ L_2 : z = w = 0, \\ L_3 : x = y, \quad z = w, \\ L_4 : x + 2y = z + w, \quad x + 2w = y + z. \end{aligned}$$

Znajdź te proste.

**Zadanie 7** Rozpatrzmy przestrzeń afiniczną  $V = M_{m \times n}(K) \simeq \mathbb{A}_K^{mn}$  z naturalnymi współrzędnymi  $x_{ij}$ . Weźmy  $s < \min(n, m)$ . Pokaż, że zbiór  $X_s = \{A \in M_{m \times n} : \text{rk } A \leq s\}$  jest algebraiczny. Czy  $X_s$  jest stożkiem? Znajdź równania opisujące  $X_1$  dla  $m = 2$  i  $n$  dowolnego.

**Zadanie 8** Pokaż, że dla dowolnej przestrzeni wektorowej  $V$  nad ciałem  $K$  zbiór klas tensorów prostych symetrycznych w  $\mathbb{P}(S^2V)$  jest zbiorem algebraicznym. Podaj jego równania jeśli  $\dim V = 2, 3$ .

**Zadanie 9** W przestrzeni afinicznej  $\mathbb{R}^3$  dane są kwadryki zadane równaniami:

- (a)  $9 + 18y - 18z + 7x^2 + 8xy + y^2 + 8xz - 16yz + z^2 = 0$ ,
- (b)  $5x^2 + 7y^2 - 4xz + 4yz + 6z^2 - 12x + 6y - 12z + 18 = 0$ ,
- (c)  $x^2 - 3y^2 + z^2 + 6yz + 4xz + 8x = 0$ .
- (d)  $26 - 6(2x - y + 2z) + \frac{1}{3}(5x^2 + y^2 + 8xz - 8yz + 3z^2) = 0$

Zmieniając afiniczny układ współrzędnych sprowadź te kwadryki do postaci kanonicznej (zob. tw. z wykładu 22). Znajdź środki symetrii, jeśli je mają.

**Zadanie 10** Znajdź wszystkie proste leżące na kwadryce zadanej w  $\mathbb{R}^3$  równaniem

$$x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3 = 12,$$

które są równoległe do płaszczyzny  $x_1 - 2x_2 = 0$ .

**Zadanie 11** Znajdź proste leżące na zespolonej kwadryce zadanej w  $\mathbb{C}^3$  równaniem

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9$$

i przechodzące przez punkt  $(1, 2, 2)$ .

# GAL2<sup>★</sup>

## Zadania na trzynasty tydzień (08.06–13.06)

### Przekształcenia rzutowe

Zakładamy, że ciało  $K$  jest nieskończone.

Przypomnienie: przestrzeń rzutowa i przestrzeń afiniczna jako jej podzbiór. Rozważmy przestrzeń rzutową  $\mathbb{P}_K^n$  ze współrzędnymi  $(y_0 : y_1 : \dots : y_n)$ . Z wykładu wiemy, że zbiór  $U_0 = \{(y_0 : y_1 : \dots : y_n) \mid y_0 \neq 0\} = \mathbb{P}_K^n \setminus V(y_0)$  utożsamiamy z przestrzenią afiniczną  $\mathbb{A}_K^n = K^n$  ze współrzędnymi afinicznymi  $x_i = \frac{y_i}{y_0}$ . W tej sytuacji podprzestrzeń liniową  $V(y_0) \subset \mathbb{P}_K^n$  nazywamy *punktami w nieskończoności* dla  $U_0 \simeq \mathbb{A}_K^n$ .

**Zadanie 0** Od przekształcenia rzutowego do przekształcenia przestrzeni afinicznej: Niech  $f : K^{n+1} \rightarrow K^{n+1}$  będzie przekształceniem liniowym zadany macierzą odwracalną  $A = [a_{ij}] \in GL_{n+1}(K)$ , czyli w podanych powyżej współrzędnych  $f$  zadane jest wzorem

$$f(y_0, y_1, \dots, y_n) = \left( \sum_{i=0}^n a_{0i} y_i, \sum_{i=0}^n a_{1i} y_i, \dots, \sum_{i=0}^n a_{ni} y_i \right).$$

Niech

$$\tilde{U}_0 = \mathbb{P}_K^n \setminus V(y_0, f^*(y_0)) = U_0 \setminus f^{-1}(V(y_0)) = \mathbb{A}_K^n \setminus V\left(\sum_{i=0}^n a_{0i} y_i\right)$$

i przez  $\tilde{f} : \tilde{U}_0 \rightarrow U_0$  oznaczmy obcięcie przekształcenia  $f$  do  $\tilde{U}_0$ . Uwaga: z reguły  $\tilde{f}$  nie jest przekształceniem afinicznym (dlaczego?).

Udowodnij, że we współrzędnych afinicznych  $[x_1, \dots, x_n]$  przekształcenie  $\tilde{f}$  przedstawia się następującym wzorem.

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left( \frac{a_{1,0} + \sum_{i=1}^n a_{1,i} x_i}{a_{0,0} + \sum_{i=1}^n a_{0,i} x_i}, \frac{a_{2,0} + \sum_{i=1}^n a_{2,i} x_i}{a_{0,0} + \sum_{i=1}^n a_{0,i} x_i}, \dots, \frac{a_{n,0} + \sum_{i=1}^n a_{n,i} x_i}{a_{0,0} + \sum_{i=1}^n a_{0,i} x_i} \right).$$

W poniższych zadaniach mówiąc o przekształceniu rzutowym przestrzeni afinicznej  $\mathbb{A}_K^n$  mamy na myśli przekształcenie zadane jak wyżej, czyli jest to przekształcenie określone na dopełnieniu pewnej hiperpłaszczyzny.

**Zadanie 1** Znajdź jakiekolwiek przekształcenie rzutowe płaszczyzny  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ , które okrąg  $x^2 + y^2 = 1$  przeprowadza na siebie oraz:

- (a) punkt  $(0, 0)$  na punkt  $(1/2, 0)$ ;

**Rozwiązanie:**  $(x, y) \mapsto \left( \frac{2x+1}{x+2}, \frac{\sqrt{3}y}{x+2} \right)$

- (b) prostą  $x = 2$  na prostą w nieskończoności.

**Rozwiązanie:**  $(x, y) \mapsto \left( \frac{2x-1}{x-2}, \frac{\sqrt{3}y}{x-2} \right)$

Wykaż, że istnieje przekształcenie rzutowe płaszczyzny zachowujące powyższy okrąg i przeprowadzające dany punkt wewnętrzny tego okręgu na dowolny inny punkt wewnętrzny.

**Zadanie 2** Znajdź jakiekolwiek przekształcenie rzutowe przestrzeni  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  przeprowadzające kwadrykę  $Q_i$  na  $Q_j$  lub uzasadnij, dlaczego takie przekształcenie nie istnieje:

$$Q_1 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad Q_2 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1, \quad Q_3 : x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1,$$

$$Q_4 : x_1^2 + x_2^2 = 2x_3, \quad Q_5 : x_1^2 - x_2^2 = 2x_3.$$

**Rozwiązanie:**  $Q_1, Q_3, Q_4$  są równoważne, topologicznie to są sfery w  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ ,  $Q_2, Q_5$  topologicznie są torusami. Np równoważność  $Q_5 \sim Q_2$

$$x_1^2 - x_2^2 = 2x_3 \xrightarrow{x_3=u+v, x_4=u-v} x_1^2 - x_2^2 = 2u^2 - 2v^2 \rightsquigarrow x_1^2 + 2v^2 - x_2^2 = 2u^2 \rightsquigarrow \left( \frac{x_1}{\sqrt{2}u} \right)^2 + \left( \frac{v}{u} \right)^2 - \left( \frac{x_2}{\sqrt{2}u} \right)^2 = 1,$$

przy czym  $u = \frac{1}{2}(x_3 + x_4) = \frac{1}{2}(x_3 + 1)$ ,  $v = \frac{1}{2}(x_3 - x_4) = \frac{1}{2}(x_3 - 1)$ . Ostatecznie

$$\left(\sqrt{2}\frac{x_1}{x_3+1}\right)^2 + \left(\frac{x_3-1}{x_3+1}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\frac{x_2}{x_3+1}\right)^2 = 1,$$

**Definicja:** Punktem stałym przekształcenia  $f : X \rightarrow X$  nazywamy taki  $x \in X$ , że  $f(x) = x$ .

**Zadanie 3** Udowodnij, że dowolne przekształcenie rzutowe przestrzeni rzutowej  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  ma co najmniej jeden punkt stały.

**Rozwiązanie:** Nad  $\mathbb{C}$  mamy wektor własny.

**Zadanie 4** Udowodnij, że jeśli  $n$  jest liczbą parzystą, to dowolne przekształcenie rzutowe przestrzeni rzutowej  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$  ma co najmniej jeden punkt stały.

**Rozwiązanie:** Nad  $\mathbb{R}$  mamy wektor własny, jeśli przestrzeń wektorowa ma nieparzysty wymiar.

**Zadanie 5** Udowodnij, że jeśli przekształcenie rzutowe  $n$ -wymiarowej przestrzeni rzutowej nad ciałem nieskończonym ma skończoną liczbę punktów stałych to ich liczba jest nie większa od  $n + 1$ .

**Rozwiązanie:** Przekształcenie rzutowe jest wyznaczone przez  $n + 2$  wartości. Zatem, jeśli jest  $n + 2$  punktów stałych, to przekształcenie jest stałe i ma nieskończenie wiele punktów stałych.

**Zadanie 6** Wykaż, że jeśli przekształcenie rzutowe  $\mathbb{P}_K^n$  przeprowadza pewną mapę afiniczną w siebie, to indukuje na tej mapie przekształcenie afiniczne.

**Rozwiązanie:** Jeśli jest określone we wszystkich punktach, to mianownik musi być stały.

**Zadanie 7** Niech  $A_1, A_2, B_1, B_2$  podprzestrzeniami rzutowymi w przestrzeni rzutowej  $\mathbb{P}_K^n$ . Załóżmy, że

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset, \quad B_1 \cap B_2 = \emptyset, \quad \text{oraz} \quad \dim A_i = \dim B_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2.$$

Udowodnij, że istnieje przekształcenie rzutowe przeprowadzające  $A_1$  na  $B_1$  i  $A_2$  na  $B_2$ .

**Rozwiązanie:** Zamieniamy problem na zagadnienie liniowe.

**Definicja:** Niech  $a, b, c, d \in K$  będzie czwórką różnych elementów ciała. Dwustosunkiem tej czwórki nazywamy

$$\frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-d}{b-c} \in K \setminus \{0\}.$$

**Zadanie 8** Sprawdź, że przekształcenia rzutowe  $\mathbb{P}_K^1$  zachowują dwustosunek.

**Rozwiązanie:** Wygodnie jest osobno sprawdzać przekształcenia  $x \mapsto x+a$ ,  $x \mapsto ax$  (te przekształcenia zachowują iloraz różnic) oraz  $x \mapsto 1/x$ .

**Zadanie 9** Udowodnij, że każde bijektywne przekształcenie dwuwymiarowej płaszczyzny  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ , przeprowadzające proste na proste i zachowujące dwustosunek czterech punktów na każdej prostej, jest przekształceniem rzutowym.

**Rozwiązanie:** Możemy założyć (składając z przekształceniem rzutowym), że przekształcenie ma 4 stałe punkty  $a, b, c, d$ . Przecięcie  $e \in \overline{ab} \cap \overline{cd}$  jest piątym punktem stałym. Ponieważ dwustosunek musi być zachowany dla  $x, a, b, e$ , więc cała prosta  $\overline{ab}$ , tak samo  $\overline{cd}$  jest stała, podobnie  $\overline{ac}$ ,  $\overline{bd}$  i już przez wszystkie punkty można poprowadzić proste, które mają co najmniej 3 punkty stałe.

**Zadanie 10** Udowodnij, że odpowiednim przekształceniem rzutowym  $\mathbb{P}_K^2$  można przeprowadzić dowolne cztery proste, z których żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie na dowolne inne cztery proste o tej samej własności.

**Rozwiązanie:** Zamiast  $\mathbb{P}(V)$ , gdzie  $V = K^3$  patrzeć na  $\mathbb{P}(V^*)$ .

**Zadanie 11** Korzystając z przekształceń rzutowych  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  udowodnij, że odcinki łączące wierzchołki trójkąta z punktami przeciwległych boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy te punkty są punktami styczności pewnej elipsy wpisanej w trójkąt.

**Zadanie 12** Zadanie z treścią: Malarz namalował obraz olejny przedstawiający aleję wysadzoną drzewami. Drzewa posadzono w równych odległościach. Na obrazie odległość od pierwszego drzewa alei do linii horyzontu jest równa  $\ell$ , a odległość między drzewami  $k$  i  $k + 1$  jest równa  $a_k$ . Wyrazić:

(a)  $a_3$  za pomocą  $a_1$  i  $a_2$ ,

**Rozwiązanie:** To jest przekształcenie rzutowe prostej w naturze na prostą na płótnie:

$$\frac{p_1 - p_2}{p_1 - p_3} \frac{p_4 - p_3}{p_4 - p_2} = \frac{-d}{-2d} \frac{d}{2d} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{p'_1 - p'_2}{p'_1 - p'_3} \frac{p'_4 - p'_3}{p'_4 - p'_2} = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{a_3}{a_2 + a_3} = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{(a_1 + a_2)a_2}{3a_1 - a_2}$$

(b)  $a_2$  za pomocą  $a_1$  i  $\ell$ .

**Rozwiązanie:**  $p_4 \rightarrow \infty$

$$\lim_{p_4 \rightarrow \infty} \frac{p_1 - p_2}{p_1 - p_3} \frac{p_4 - p_3}{p_4 - p_2} = \frac{p_1 - p_2}{p_1 - p_3} = \frac{1}{2}$$

Niech  $h$  oznacza punkt na horyzoncie

$$\frac{p'_1 - p'_2}{p'_1 - p'_3} \frac{h - p'_3}{h - p'_2} = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \frac{\ell - a_1 - a_2}{\ell - a_1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{(l - a_1)a_1}{l + a_1}$$

Następujące zadania "szkolne" dotyczą rzeczywistej płaszczyzny afinicznej. Prostą przechodzącą przez dwa punkty  $p$  i  $q$  oznaczamy  $\overline{pq}$

**Zadanie 13** (twierdzenie Desargues'a o prostych na płaszczyźnie). Dane sześć różnych punktów na płaszczyźnie. Pokaż, że jeżeli proste  $\overline{aa_1}$ ,  $\overline{bb_1}$ ,  $\overline{cc_1}$  przecinają się w jednym punkcie, to punkty przecięcia prostych  $\overline{ab}$  z  $\overline{a_1b_1}$ ,  $\overline{bc}$  z  $\overline{b_1c_1}$ ,  $\overline{ac}$  z  $\overline{a_1c_1}$  leżą na jednej prostej.

**Rozwiązanie:** Wybrać afiniczne otoczenie, w którym jedna z prostych jest prostą w nieskończoności.

**Zadanie 14** (twierdzenie Pascala o sześciokącie na płaszczyźnie). Udowodnij, że punkty przecięcia przeciwległych boków sześciokąta wpisanego w okrąg leżą na jednej prostej.

**Rozwiązanie:** Wybrać mapę afiniczną, w której dwie pary przeciwległych boków sześciokąta są równoległe. Co prawda okrąg jest wtedy przekształcony na elipsę, ale przekształceniem afinicznym można go z powrotem zamienić na okrąg, co nie zmieni równoległości prostych. Uwaga: okrąg można zastąpić dowolną stożkową.

**Zadanie 15** (twierdzenie Pappusa o sześciokącie na płaszczyźnie). Udowodnić, że punkty przecięcia przeciwległych boków sześciokąta, którego wierzchołki znajdują się kolejno na dwóch zadanych prostych leżą na jednej prostej.

# GAL2<sup>★</sup>

## Zadania na czternasty tydzień (13.06–15.06)

### Seria ostatnia, na do widzenia

Zadań jest dużo i oczywiście na ćwiczeniach wszystkich nie zrobimy, ale zachęcamy by spróbować zrobić ile się da, dodając ewentualnie upraszczające założenia, np. w zadaniach o Grassmanianach zakładać  $k \leq 2$

W poniższych zadaniach będziemy rozważać wielomiany o współczynnikach w ciele  $K$ . Zakładamy, że ciało ma charakterystykę różną od 2 i w zadaniach o wielomianach Schura można zakładać, że jest nieskończone.

Ustalmy  $n \in \mathbb{N}$ . Niech  $a = (a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n \geq 0)$  będzie ciągiem liczb naturalnych. Oznaczmy przez  $W_a$  antysymetryzację jednomianu  $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ , czyli:

$$W_a = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n x_i^{a_{\sigma(i)}} = \det \left[ x_i^{a_j} \right]_{1 \leq i, j \leq n} \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

W szczególności dla  $a = \rho_n = (n-1, n-2, \dots, 0)$  wielomian  $W_{\rho_n}$  jest równy z dokładnością do znaku wyznacznikowi Vandermonde'a

$$W_{\rho_n} = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

**Zadanie 16** Udowodnić, że wielomiany  $W_a$  stanowią bazę wielomianów antysymetrycznych od  $n$  zmiennych, czyli podprzestrzeni wielomianów

$$\mathcal{A}_n(K) = \{f \in K[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \text{ dla } i \neq j\}.$$

*Uwaga: stwierdzenie jest prawdziwe nad  $\mathbb{Z}$  jeśli właściwie interpretować pojęcie bazy.*

**Zadanie 17** Niech  $\mathcal{S}_n(K)$  oznacza przestrzeń liniową wielomianów symetrycznych. Udowodnić, że przekształcenie

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n(K) &\rightarrow \mathcal{A}_n(K) \\ f &\mapsto W_{\rho_n} \cdot f \end{aligned}$$

jest izomorfizmem.

**Definicja.** Niech  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n)$  będzie ciągiem liczb naturalnych. Wielomianem Schura  $s_\lambda \in K(x_1, x_2, \dots, x_n)$  nazywamy iloraz

$$s_\lambda = W_{\lambda + \rho_n} / W_{\rho_n}.$$

Na przykład

$$\begin{aligned} s_{3,2,0}(x_1, x_2, x_3) &= W_{5,3,0} / W_{2,1,0} = \det \begin{pmatrix} x_1^5 & x_1^3 & 1 \\ x_2^5 & x_2^3 & 1 \\ x_3^5 & x_3^3 & 1 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 + x_1^3 x_2 x_3 + 2x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1 x_2^3 x_3 + x_1^3 x_3^2 + 2x_1^2 x_2 x_3^2 + 2x_1 x_2^2 x_3^2 + x_2^3 x_3^2 + x_1^2 x_3^3 + x_1 x_2 x_3^3 + x_2^2 x_3^3 \end{aligned}$$

**Zadanie 18** Przedstawić  $s_{k,\ell}$  jako wielomian zmiennych  $x_1, x_2$ .

**Zadanie 19** Wykazać, że  $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$  jest wielomianem, ponadto  $s_\lambda \in \mathcal{S}_n(K)$ .

**Zadanie 20** Wykazać, że wielomiany Schura stanowią bazę  $\mathcal{S}_n(K)$ .

**Zadanie 21** Wykazać że dla  $k < n$  mamy

$$s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = 0$$

jesli  $\lambda_{k+1} > 0$ , oraz

$$s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

w przeciwnym przypadku.

**Zadanie 22** Sprawdzić, że jeśli  $\lambda = (\underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_k, 0, 0, 0, \dots, 0)$  to  $s_\lambda$  jest elementarnym wielomianem symetrycznym

$$e_k = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \prod_{j=1}^k x_{i_j}$$

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i t) = \sum_{k=0}^n e_k t^k.$$

**Zadanie 23** Grassmanian podprzestrzeniami wymiaru  $k$  w przestrzeni liniowej wymiaru  $n$  nad ciałem  $K$  oznaczamy  $Grass_K(k, n)$  lub po prostu  $Grass(k, n)$ . Niech  $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = K^n$  będzie *standardową flagą*, tzn  $V_i = \text{lin}\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_i\}$ . Niech  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$  będzie ciągiem liczb naturalnych. Zdefiniujemy

$$\Omega_a(K) = \{W \in Grass(k, n) \mid \dim(W \cap V_{a_i}) = i, \dim(W \cap V_{a_{i-1}}) < i \text{ dla } i = 1, 2, \dots, k\}$$

(przyjmujemy  $V_0 = 0$ ). Wskazać bijekcję  $\Omega_a(K) = K^{d_a}$ , gdzie  $d_a = \sum_{i=1}^k (a_i - i)$ .

**Zadanie 24** Niech  $\mathbb{F}_q$  będzie ciałem o  $q$  elementach. Ile jest podprzestrzeni  $k$  wymiarowych w  $\mathbb{F}_q^n$ ? Oznaczmy tę liczbę przez  $\zeta_{k,n}(q)$ . Udowodnić, że  $\zeta_{k,n}(q)$  zależy od  $q$  wielomianowo. Udowodnić, że współczynnik przy  $q^\ell$  jest równy ilości ciągów rosnących  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq n$  takich, że  $\sum (a_i - i) = \ell$ .

**Zadanie 25** Dualność Poincaré: Wykazać równość

$$q^{k(n-k)} \zeta_{k,n}(q^{-1}) = \zeta_{k,n}(q)$$

**Zadanie 26** Rozważyć afiniczne otoczenie  $\text{lin}\{\epsilon_1, \epsilon_2\} \in U_{1,2} \subset Grass(2, 4)$

$$U_{1,2} = \{W \in Grass_2(K^4) \mid W \cap \text{lin}\{\epsilon_3, \epsilon_4\} = 0\}.$$

Współrzędne Plückera zadają bijekcję

$$\left(\frac{x_{13}}{x_{12}}, \frac{x_{14}}{x_{12}}, \frac{x_{23}}{x_{12}}, \frac{x_{24}}{x_{12}}\right) : U_{1,2} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_K^4.$$

Opisać przecięcia zbiorów  $\Omega_a$  z  $U_{1,2}$  we współrzędnych.

**Zadanie 27** Rozważmy podgrupę  $G \subset GL_n(\mathbb{C})$  składającą się z macierzy diagonalnych

$$g(t) = \text{diag}(t^n, t^{n-1}, \dots, t), \quad t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Grupa  $G$  działa na  $\mathbb{C}^n$ , a zatem i na zbiorze podprzestrzeni liniowych w  $\mathbb{C}^n$ , czyli na grassmanianie  $Grass_k(\mathbb{C}^n)$ . Wykazać, to działanie zachowuje standardowe otoczenia afiniczne. Opisać punkty stałe działania.

*Wskazówka: punkty stałe są postaci  $W_a = \text{lin}\{\epsilon_{a_1}, \epsilon_{a_2}, \dots, \epsilon_{a_k}\}$ .*

**Zadanie 28** Dla  $W \in Grass_k(\mathbb{C}^n)$  wykazać, że granica  $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) \cdot W$  zawsze istnieje i jest punktem stałym działania  $G$ . Niech  $V \in Grass_k(\mathbb{C}^n)$  będzie punktem stałym. Udowodnić, że zbiór

$$X_a^+ = \{W \in Grass_k(\mathbb{C}^n) \mid \lim_{t \rightarrow 0} g(t) \cdot W = W_a\}$$

jest równy  $\Omega_a$  z zadania 12.

*Wskazówka: rozważyć na początku przypadek  $k = 1$ , czyli  $Grass_1(\mathbb{C}^n) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}$ , a potem  $Grass_2(\mathbb{C}^4)$ .*

## GAL2\*

### Zadania domowe, pierwsza seria, do oddania 21.03, godz 14:30

**Zadanie 1** Niech  $\varphi : V \rightarrow W$  będzie przekształceniem liniowym przestrzeni wektorowych z jądrem  $\iota : K \rightarrow V$  i коядром  $\kappa : W \rightarrow Q$ . Pokaż, że jądro przekształcenia sprzężonego  $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$  można utożsamić z  $\kappa^* : Q^* \rightarrow W^*$  a коядро  $\varphi^*$  z  $\iota^* : V^* \rightarrow K^*$ ; przedstaw izomorfizmy jako odwzorowania przestrzeni funkcjonalów

$$\ker(\varphi^*) \simeq (\operatorname{coker} \varphi)^*, \quad \operatorname{coker}(\varphi^*) \simeq (\ker \varphi)^*$$

**Zadanie 2**

Niech  $V$  będzie przestrzenią skończonego wymiaru nad  $\mathbb{Q}$  i niech  $\varphi : V \rightarrow V$  będzie endomorfizmem, takim że  $\varphi^5 = id$ . Załóżmy, że 1 nie jest wartością własną  $\varphi$ . Udowodnij, że wymiar  $V$  jest podzielny przez 4.

**Zadanie 3** Zbadaj diagonalizowalność (nad  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{C}$ ) macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 4** Niech  $\varphi : K^5 \rightarrow K^5$  będzie przekształceniem zadanym w bazie standardowej przez macierz

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 5 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Znajdź bazę Jordana dla  $\varphi$ . Rozstrzygnij jak odpowiedź zależy od charakterystyki ciała.

**Zadanie 5** Korzystając z formy Jordana pokaż, że każda macierz nad  $\mathbb{C}$  jest produktem dwóch macierzy symetrycznych.

## GAL2\*

### Zadania domowe, druga seria, do oddania 04.04, godz 14:30

#### Zadanie 1

Niech  $\varphi : V \rightarrow W$  będzie niezerowym przekształceniem liniowym. Przypomnijmy, że przekształceniu  $\varphi$  odpowiada tensor w  $\tilde{\varphi} \in V^* \otimes W$ .

a) Pokaż, że rząd przekształcenia  $\varphi$  jest równy rzędowi tensora  $\tilde{\varphi}$  czyli minimalnej liczbie tensorów prostych, których suma jest równa  $\tilde{\varphi}$ .

b) Załóżmy, że przestrzeń  $V$  ma wymiar 2 i bazę  $\alpha_1, \alpha_2$  a przestrzeń  $W$  ma wymiar  $n$  i bazę  $\beta_1, \dots, \beta_n$ . Znajdź warunki, równania na współczynniki  $a_{ij}$ , które opisują zbiór tensorów prostych w  $V^* \otimes W$  zapisanych jako

$$\sum_{i,j} a_{ij} (\alpha_i^* \otimes \beta_j).$$

#### Zadanie 2

Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową skończonego wymiaru. Niech

$$\tilde{\vartheta} : V^* \otimes V \longrightarrow L(V, V)$$

będzie indukowane przez przekształcenie dwuliniowe

$$\vartheta : V^* \times V \longrightarrow L(V, V), \quad \vartheta(f, v)(w) = f(w)v.$$

Przypomnijmy, że  $\tilde{\vartheta}$  jest izomorfizmem. Rozważyc złożenie

$$\Theta : K \xrightarrow{\alpha} K^* \xrightarrow{tr^*} L(V, V)^* \xrightarrow{\vartheta^*} (V^* \otimes V)^* \simeq V^{**} \otimes V^* \xrightarrow{\tau} V^* \otimes V \xrightarrow{\vartheta} L(V, V).$$

W powyższym ciągu:

- $\alpha$  jest przekształceniem przeprowadzającym  $1 \in K$  na funkcjonal  $f = id$ ,
- $tr : L(V, V) \rightarrow K$ , jest odwzorowaniem śladu, a  $tr^*$  odwzorowaniem sprzężonym,
- $\tau$  jest złożeniem przestawienia czynników i izomorfizmu  $V^{**} \simeq V$ .

Znajdź  $\Theta(1)$ .

#### Zadanie 3

Niech  $\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$  będzie standardową bazą  $K^n$ . Dla ciągu  $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$  oznaczmy przez  $\varepsilon_I \in \bigwedge^k K^n$  iloczyn zewnętrzny wektorów bazowych  $\varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_k}$ . Wektory  $\varepsilon_I$  stanowią bazę  $\bigwedge^k K^n$ . Niech  $v_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in K^n, i = 1, 2, \dots, k$ . Oblicz współczynniki  $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$  w bazie  $\varepsilon_I$ .

#### Zadanie 4

Niech  $V$  będzie przestrzenią wymiaru  $n$ . Przekształcenie liniowe  $\varphi : V \rightarrow W$  indukuje przekształcenie potęg zewnętrznych

$$\bigwedge^k \varphi : \bigwedge^k V \longrightarrow \bigwedge^k W,$$

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k \mapsto \varphi(v_1) \wedge \varphi(v_2) \wedge \dots \wedge \varphi(v_k).$$

Wykaż, że jeśli  $\varphi$  jest rzędu  $k$ , to wymiar obrazu  $im(\bigwedge^k \varphi) \subset \bigwedge^k W$  jest równy 1.

#### Zadanie 5

Niech  $(V, \varphi)$  będzie dwuliniową formą symetryczną. Rozważmy podprzestrzeń  $W \subset T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$  rozpiętą przez tensory postaci

$$a \otimes v \otimes v \otimes b - \varphi(v, v) a \otimes b,$$

gdzie  $v \in V, a, b \in T(V)$ . Zakładając, że  $\dim(V) = n$  oblicz  $\dim(T(V)/W)$ .

## GAL2\*

### Zadania domowe, trzecia seria, do oddania 21.04, godz 14:30

#### Zadanie 1

Policz, w zależności od parametrów  $t, s \in \mathbb{R}$ , rząd i sygnaturę dwuliniowej rzeczywistej formy symetrycznej zadanej poniższą macierzą :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s & s^2 + 1 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Zadanie 2** W odpowiedziach na poniższe pytania sformułuj twierdzenie (lub twierdzenia), z którego (z których) korzystasz

- (a) Załóżmy, że rzeczywista dwuliniowa forma symetryczna  $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  jest zadana w bazie standardowej za pomocą macierzy symetrycznej  $A$  takiej, że  $\det A = -7$ . Załóżmy dodatkowo, że istnieje wektor  $v \in \mathbb{R}^3$  spełniający warunek  $h(v, v) = 5$ . Znajdź macierz diagonalną, która jest kongruentna z  $A$  nad  $\mathbb{R}$ .
- (b) Załóżmy, że  $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  jest niezerową dwuliniową formą symetryczną, która jest osobliwa i ma sygnaturę zero. Pokaż, że istnieje wektor  $v \in \mathbb{R}^3$  taki, że  $h(v, v) = 0$  oraz  $\text{lin}(v)^\perp \neq \mathbb{R}^3$ .

**Zadanie 3** Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową wymiaru  $n$  nad ciałem  $K$  charakterystyki  $\neq 2$ . Na przestrzeni liniowej  $W = \{(v, f), v \in V, f \in V^*\} = V \times V^*$  nad ciałem  $K$  rozważamy symetryczną formę dwuliniową  $h : W \times W \rightarrow K$  postaci  $h((v, f), (w, g)) = f(w) + g(v)$ . Znajdź rząd formy  $h$ . Rozstrzygnij czy  $W$  jest sumą prostą podprzestrzeni izotropowych dla formy  $h$  i jeśli tak, to je wskaż.

**Zadanie 4** Niech  $h$  będzie formą dwuliniową na przestrzeni liniowej  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  zadaną wzorem

$$h(A, B) = 2 \cdot \text{tr}(AB) - \text{tr}(A) \cdot \text{tr}(B)$$

dla dowolnej pary macierzy  $A, B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Znajdź rząd i sygnaturę formy  $h$  oraz maksymalny wymiar jej podprzestrzeni izotropowych. Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 5** Wykorzystując algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta udowodnij, że każdą odwracalną macierz  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  można przedstawić jako iloczyn macierzy ortogonalnej  $K \in O_n(\mathbb{R})$  i macierzy górnotrójkątnej  $M$  z wyrazami dodatnimi na przekątnej:

$$A = KM.$$

Wykaż, że to przedstawienie jest jednoznaczne oraz znajdź je dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

## GAL2<sup>★</sup>

### Zadania domowe, czwarta seria, do oddania 05.05, godz 14:30

#### Zadanie 1

Niech  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  będzie przestrzenią euklidesową z iloczynem skalarnym zadanym formułą

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2 + x_3y_2 + x_2y_3 + 2x_3y_3.$$

Rozstrzygnij, czy przekształcenie, które w bazie standardowej ma macierz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

jest samosprężone; odpowiedź uzasadnij.

#### Zadanie 2

Przedstaw macierz

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -64 & 25 \\ 50 & -25 & 40 \\ 14 & 2 & -50 \end{bmatrix}$$

w postaci  $M = PA$ , gdzie  $P = P^T$  oraz  $A \in O_{\mathbb{R}}(3)$ . Przedstaw kroki pośrednie i stosowne obliczenia.

#### Zadanie 3

Rozpatrzmy macierz  $Z \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ . Pokaż, że

$$\det(I_m - Z \cdot Z^T) = \det(I_n - Z^T \cdot Z)$$

gdzie  $I_k$  jest jednostkową macierzą  $k \times k$ .

#### Zadanie 4

Niech  $A$  będzie macierzą symetryczną, którą interpretujemy jednocześnie jako przekształcenie samo-sprężone przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  ze standardowym iloczynem skalarnym. Niech  $\lambda_{\min}(A)$  oraz  $\lambda_{\max}(A)$  będą odpowiednio najmniejszą i największą wartością własną macierzy  $A$ . Pokaż, że:

$$\lambda_{\min}(A) = \min_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle, \quad \lambda_{\max}(A) = \max_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle.$$

**Definicja.** Przez macierz sąsiedztwa grafu nieskierowanego  $G$  o zbiorze  $n$  wierzchołków  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  oraz zbiorze krawędzi  $E$  rozumiemy macierz symetryczną  $M(G) = (m_{ij}) \in M_{n \times n}(\{0, 1\})$  taką, że  $m_{ij} = 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje krawędź w  $G$  łącząca  $i$  oraz  $j$ .

#### Zadanie 5

Pokaż, że jeśli  $G$  jest grafem prostym (nie ma pętli i wielokrotnych krawędzi), to wartości własne  $\lambda_i$  macierzy sąsiedztwa tego grafu spełniają równości  $\sum \lambda_i = 0$  oraz  $\sum \lambda_i^2 = 2e(G)$ , gdzie  $e(G)$  oznacza liczbę krawędzi w  $G$ .

## GAL2\*

### Zadania domowe, piąta seria, do oddania 16.05, godz 14:30

**Zadanie 1** Niech  $\varphi, \psi$  będą samosprężonymi przekształceniami liniowej przestrzeni euklidesowej. Załóżmy, że endomorfizm  $\varphi$  jest dodatnio określony. Udowodnić że wartości własne złożenia  $\varphi \circ \psi$  są rzeczywiste. Uwaga: nie zakładamy, że  $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ , więc endomorfizm  $\varphi \circ \psi$  nie musi być samosprężony.

**Zadanie 2** Niech  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ . Przypomnijmy, że  $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ .

- (a) Udowodnij, że jeśli  $A = -A^*$ ,  $\text{tr}(A) = 0$ , to  $\exp(A) \in SU(n)$ .
- (b) Wykaż, że jeśli  $B \in SU(n)$ , to istnieje macierz  $A = -A^*$ ,  $\text{tr}(A) = 0$  taka, że  $B = \exp(A)$ .
- (c) Pokaż, że nie każda macierz  $B \in SL_2(\mathbb{C})$  jest postaci  $\exp(A)$  gdzie  $\text{tr}(A) = 0$

**Zadanie 3** Załóżmy, że  $\varphi \in \text{End}(V)$  jest przekształceniem samosprężonym przestrzeni unitarnej skończonego wymiaru. Udowodnij następujące własności

- (a) endomorfizm  $\varphi - i \cdot \text{id}_V$  jest automorfizmem,
- (b) endomorfizm  $\psi = (\varphi - i \cdot \text{id}_V)^{-1} \circ (\varphi + i \cdot \text{id}_V)$  jest przekształceniem unitarnym,
- (c) endomorfizm  $\psi - \text{id}_V$  jest automorfizmem,
- (d)  $\varphi = i \cdot (\psi - \text{id}_V)^{-1} \circ (\psi + \text{id}_V)$ .

**Zadanie 4** Przekształcenie przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^3$  zadane jest w standardowej bazie macierzą:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Znajdź bazę ortogonalną, w której to przekształcenie ma postać klatkowo-diagonalną z klatkami nie większymi niż  $2 \times 2$ .

**Zadanie 5** Przez  $\mathfrak{S} \subset \mathbb{H}$  oznaczmy  $\mathbb{R}$ -przestrzeń czystych kwaternionów ze standardowym iloczynem skalarnym.

- (a) Znajdź wszystkie rozwiązania równania  $x^2 = 1$  w  $\mathfrak{S}$  i w  $\mathbb{H}$ .
- (b) Pokaż, że dla dowolnej bazy ortonormalnej  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  przestrzeni  $\mathfrak{S}$  istnieje kwaternion  $u$  o normie 1, taki że

$$u \cdot \alpha_1 \cdot u^{-1} = \mathbf{i}, \quad u \cdot \alpha_2 \cdot u^{-1} = \mathbf{j}, \quad u \cdot \alpha_3 \cdot u^{-1} \in \{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$$

## GAL2<sup>★</sup>

### Zadania domowe, szósta seria, do oddania 30.05, godz 14:30

**Zadanie 1** W przestrzeni afinicznej  $\mathbb{R}^4$  dany jest punkt  $c = [4, 5, 2, 7]$  oraz dwie proste:

- $L$  przechodząca przez punkty  $a_1 = [1, 1, 1, 1]$ ,  $a_2 = [0, -1, 0, 1]$ ,
- $K$  przechodząca przez punkty  $b_1 = [2, 2, 3, 1]$ ,  $b_2 = [1, 2, 2, -2]$ .

Czy istnieje prosta  $N$  przechodząca przez punkt  $c$  i przecinająca proste  $L$  i  $K$ ? Jeśli tak, to znaleźć punkty przecięcia  $L$  z  $N$  i  $K$  z  $N$ .

**Zadanie 2** Dane sześć różnych punktów  $a, b, c, p, q$  i  $r$  w przestrzeni afinicznej nad  $K$ . Przypuśćmy, że punkty  $p, q$  i  $r$  leżą odpowiednio na prostych  $L(b, c)$ ,  $L(c, a)$  i  $L(a, b)$ :

$$p = \lambda b + (1 - \lambda)c, \quad q = \mu c + (1 - \mu)a, \quad r = \nu a + (1 - \nu)b.$$

Założmy, że żadne dwie proste występujące w zadaniu nie są równoległe. Znaleźć warunek dla  $\lambda, \mu, \nu \in K$  na to, by proste  $L(a, p)$ ,  $L(b, q)$  i  $L(c, r)$  przecinały się w jednym punkcie. (Wskazówka: Twierdzenie Cevy.)

**Zadanie 3** Niech  $f : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  będzie przekształceniem afinicznym takim, że  $f(p_i) = q_i$ , gdzie

$$p_0 = (3, 2, 3), \quad p_1 = (4, 2, 3), \quad p_2 = (3, 3, 3), \quad p_3 = (3, 2, 4),$$

$$q_0 = (2, 4, 6), \quad q_1 = (1, 8, 12), \quad q_2 = (-1, -5, -1), \quad q_3 = (6, 12, 11).$$

Znaleźć punkty stałe, proste i płaszczyzny niezmiennicze przekształcenia  $f$ .

**Zadanie 4** Czy istnieje przekształcenie afiniczne  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^4$ , które punkty  $a_i$  przekształca na punkty  $b_i$  odpowiednio, zaś prostą  $P$  na prostą  $H$ . Jeżeli takie przekształcenie istnieje to znaleźć jego postać analityczną i ustalić, czy jest ono wyznaczone jednoznacznie.

$$\begin{array}{ll} a_0 = [1, 1, 1, 1] & b_0 = [-1, 1, -1, 1] \\ a_1 = [2, 3, 2, 3] & b_1 = [0, 4, 0, 4] \\ a_2 = [3, 2, 3, 2] & b_2 = [2, 2, 2, 2] \end{array}$$

$$P = [1, 2, 2, 2] + t(0, 1, 0, 1)$$

$$H = [-1, 2, 0, 3] + s(1, -5, 1, -5)$$

**Zadanie 5** Niech  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$  będą punktami przestrzeni euklidesowej, takimi. Założmy, że wszystkie odległości są jednostkowe:  $\rho(p_i, p_j) = 1$  dla  $i \neq j$ . Niech  $0 \leq k < n$ . Znaleźć odległość pomiędzy podprzestrznią  $\langle p_0, p_1, p_2, \dots, p_k \rangle$  a  $\langle p_{k+1}, p_1, p_2, \dots, p_n \rangle$

We wszystkich zadaniach zakładamy  $\text{char } K \neq 2$ .

**Zadanie 1** W przestrzeni afinicznej  $H = \mathbb{A}_K^n$  z przestrzenią styczną  $V = T(H) = K^n$ , w pewnym układzie bazowym z punktem bazowym  $p_0$ , zadana jest niepusta kwadryka  $Q = V(F(p_0 + v))$ . Zakładamy, że funkcja wielomianowa  $F$  jest postaci

$$F(p_0 + v) = q(v) + \ell(v) + a$$

gdzie  $q$  jest formą kwadratową na  $V$ ,  $\ell$  jest formą liniową na  $V$  oraz  $a \in K$ . Udowodnij, że jeśli  $q_0 = p_0 + w \in \mathbb{A}_K^n$  jest środkiem symetrii kwadryki  $Q$ , to  $2\tilde{h}(w) = -\ell$  gdzie  $\tilde{h} : V \rightarrow V^*$  jest przekształceniem liniowym odpowiadającym symetrycznej formie dwuliniowej  $h$ , takiej że  $q(v) = h(v, v)$ .

**Zadanie 2** Dla jakich parametrów  $a \in \mathbb{R}$  funkcja kwadratowa

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2a x_1 x_2 + 2a x_1 x_3 + 2a x_2 x_3 - 4a$$

opisuje elipsoidę w  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ ? Określ typ powierzchni  $V(F)$  w zależności od parametru  $a \in \mathbb{R}$ .

**Zadanie 3** W afinicznej przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^4$  ze standardowym, produktem skalarnym dane są proste  $L = \{[0, 7, 1, 2] + t(0, 1, -1, 0)\}$  oraz  $K = \{[1, 1, 1, 1] + t(1, 0, 0, -1)\}$ . Znajdź płaszczyznę przechodzącą przez punkt  $[4, 1, 3, 1]$ , która jest prostopadła do  $L$  i nie przecina  $K$ .

**Zadanie 4**

- (a) W przestrzeni  $V = K^4$  wybierzmy bazę  $\alpha_0, \dots, \alpha_3$  i odpowiadające jej współrzędne jednorodne  $(x_0 : \dots : x_3)$  na przestrzeni rzutowej  $\mathbb{P}_K^3 = \mathbb{P}(V)$ . Na zbiorze afinicznym  $\mathbb{A}_K^3 = \mathbb{P}(V) \setminus V(x_0)$  mamy współrzędne  $y_i = \frac{x_i}{x_0}$ . Załóżmy, że prosta  $L \subset \mathbb{A}_K^3$  zadana jest parametrycznie w tych współrzędnych  $[a_1, a_2, a_3] + t \cdot (b_1, b_2, b_3)$ . Pokaż, że prostej  $L$  odpowiada płaszczyzna w  $V$ , która jako punkt na Grassmanianie  $\text{Grass}(2, 4) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 V)$  jest reprezentowana przez tensor

$$\left( \alpha_0 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 \right) \wedge \left( b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + b_3 \alpha_3 \right)$$

- (b) Rozpatrzmy następujące cztery proste w  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$  zadane parametrycznie

$$L_0 = [0, 0, 0] + t(1, 1, 1), \quad L_1 = [1, 0, 0] + t(0, 1, 0), \quad L_2 = [0, 1, 0] + t(0, 0, 1), \quad L_3 = [0, 0, 1] + t(1, 0, 0)$$

Pokaż, że istnieją dokładnie dwie proste  $M_1$  i  $M_2$  spotykające wszystkie proste  $L_i$  i zapisz  $M_i$  w postaci parametrycznej  $p_i + t \cdot v_i$ .

Wskazówka: Korzystając z poprzedniego punktu policz, że wektory styczne to odpowiednio  $v_1 = (1, e, e^2)$  i  $v_2 = (1, e^2, e)$ , gdzie  $e$  jest pierwiastkiem pierwotnym stopnia 3 z 1, czyli liczbą zespoloną spełniającą równanie  $e^2 + e + 1 = 0$ , następnie znajdź  $p_i = M_i \cap L_0$ .

**Zadanie 5** Znajdź wszystkie proste leżące na kwadryce zadanej w  $\mathbb{R}^3$  równaniem

$$x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1 x_2 + 2x_2 x_3 - 2x_1 x_3 = 12,$$

które są równoległe do płaszczyzny  $x_1 - 2x_2 = 0$ .