

Zadania wybrane przez Piotra Oszera i Andrzeja Webera

Zadania do rozwiązania przy tablicy 9 października

1 Dokończyć zadanie: dla jakiego parametru $a \in \mathbb{R}$ układ zadany macierzą $\left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a-1 \\ 1 & a & 1 & 1-a \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array} \right]$ ma jedno/wiele/zero rozwiązań.

2 Rozwiązać układ równań zadany przez macierz $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & 0 \end{array} \right]$ dla $a, b, c \in \mathbb{R}$.

3 Wyznaczyć wartość parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których układ równań jest niesprzeczny

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = a \\ x_1 + ax_2 + x_3 + ax_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

4 Niech $n \geq 3$. Rozwiąż, w zależności od n , układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = 0 \quad (1 \leq i \leq n-2) \\ x_{n-1} + x_n = 0. \end{cases}$$

5 Znaleźć układ równań nad $\mathbb{R}$, którego zbiór rozwiązań jest postaci

$$(s + t + 1, 3s - t - 2, s - t, 2s - t - 1).$$

6 Wiemy, że $(1,2,3)$, $(2,3,1)$ i $(3,1,2)$ są rozwiązaniami pewnego układu równań liniowych oraz $(0,0,0)$ nie jest rozwiązaniem. Wskazać wszystkie trójki liczb będące rozwiązaniami.

Zadania do rozwiązania przy tablicy 16-17 października

1 Niech p będzie liczbą pierwszą.

- a) Znaleźć sumę elementów $\mathbb{Z}_p$.
- b) Znaleźć iloczyn niezerowych elementów $\mathbb{Z}_p$,

2 Rozwiązać układ równań liniowych

$$\begin{cases} 5x + 3y = 4 \\ 3x + 6y = 1 \end{cases}$$

- a) w ciele $\mathbb{Z}_{11}$
- b) w ciele $\mathbb{Z}_7$

3 W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania

- a) $z^8 = 1$,
- b) $z^{12} = 1$,
- c) $z^4 = (1 - i)^4$,
- d) $(z - 1)^6 = (i - z)^6$,

(Odpowiedzi do poniższych zadań szukaj w [Kostrykin, Zbiór zadań z algebry, roz 5])

4 Znaleźć część rzeczywistą i urojoną liczby

- a) $(1 + i)^{1000}$
- b) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$

Wskazówka: zapisać liczbę w postaci trygonometrycznej.

5 Rozwiązać równania liniowe o współczynnikach zespolonych

- a) $\begin{cases} (1 + i)z_1 + (1 - i)z_2 = 1 + i \\ (1 - i)z_1 + (1 + i)z_2 = 1 + 3i \end{cases}$
- b) $\begin{cases} x + iy - 2z = 10 \\ x - y + 2iz = 20 \\ ix - 3iy - (1 + i)z = 30 \end{cases}$

Zadania do rozwiązania przy tablicy 23-24 października

1 Dla liczby naturalnej k definiujemy liczbę zespoloną $z_k = \cos(\frac{\pi k}{6}) + i \sin(\frac{\pi k}{6})$. Dla jakich $k \leq 12$ istnieje liczba $m \in \mathbb{N}$ taka, że $z_k^m = z_1$?

2 Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnić wzór

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin x + \sin nx - \sin(1+n)x}{2(1 - \cos x)}$$

Wskazówka: Zastąpić $\sin x$ liczbą zespoloną i skorzystać ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego.

3 Naszkicuj na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}((z+1+i)^4) \geq 0\}$$

4 Rozłożyć wielomian $f(x)$ na iloczyn wielomianów stopni ≤ 2 o współczynnikach rzeczywistych.

a) $f(x) = x^7 + 8x^4 + 4x^3 + 32$

b) $f(x) = x^6 + x^3 + 1$

Odp: $(x^2 - 2\cos(\frac{2}{9}\pi)x + 1)(x^2 - 2\cos(\frac{4}{9}\pi)x + 1)(x^2 - 2\cos(\frac{8}{9}\pi)x + 1)$

c) $f(x) = x^5 - 1$

5 Czy wielomian $x^4 - x \in \mathbb{Z}_2[x]$ da się rozłożyć na iloczyn wielomianów stopnia ≤ 2 ?

6 Czy wielomian $x^9 - x \in \mathbb{Z}_3[x]$ da się rozłożyć na iloczyn wielomianów stopnia ≤ 2 ?

7 Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 38x + 26 = 0$ wiedząc, że jednym z rozwiązań jest $x = 1 + i$

Zadania do rozwiązania przy tablicy 31 października

1 Niech $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ oznacza zbiór funkcji z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Które z poniższych podzbiorów X są podprzestrzeniami liniowymi?

- a) funkcje wielomianowe?
- b) funkcje spełniające $f(0) = 1$?
- c) funkcje spełniające $f(1) = 0$? ‘ d) funkcje spełniające $f(x) = f(-x)$, dla każdego $x \in \mathbb{R}$?
- e) funkcje spełniające $f(x) > 0$ dla $x > 0$?
- f) funkcje okresowe?

2 Ile jest podprzestrzeni liniowych w $(\mathbb{Z}_3)^2$? Opisać je równaniami.

3 Czy wektor $(1, 1, 1)$ należy do podprzestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ rozpiętej przez $(1, 3, 2)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 5, 3)$?
A wektor $(1, 4, 3)$?

4 a) Znaleźć układ wektorów rozpinający podprzestrzeń liniową w $\mathbb{R}^4$ opisaną równaniami

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

b) Opisać równaniami podprzestrzeń $\mathbb{R}^4$ rozpiętą przez wektory $(1, -1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$ w $\mathbb{R}^4$,

5 Opisać równaniami podprzestrzeń liniową w $\mathbb{R}^5$ rozpiętą przez wektory

$$(1, -1, 1, -1, 1), \quad (1, 1, 0, 0, 3), \quad (3, 1, 1, -1, 7), \quad (0, 2, -1, 1, 2).$$

6 Udowodnić, że każdy wektor przestrzeni $\mathbb{C}^4$ rozpiętej na wektorach

$$(i, 1, -i, -1), \quad (i, -i, 1, -1), \quad (1, 0, 0, -1)$$

spełnia warunek: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Natomiast nie każdy spełnia $x_4 = -1$.

Zadania do rozwiązania przy tablicy 6-7 listopada

1 Czy te układy wektorów są liniowo niezależne?

a) $(1, 1, 0)$, $(1, 2, -3)$, $(2, 4, 1)$ w $\mathbb{R}^3$;

b) $(1, 2, 1, 1)$, $(2, -1, -1, 4)$, $(5, 5, 2, 7)$ w $\mathbb{R}^4$;

2 Wyznaczyć wszystkie wartości parametru a , tak by układ $(a, 1, 1)$, $(1, a, 1)$, $(1, 1, a) \in \mathbb{R}^3$ był liniowo niezależny.

3 Czy te układy wektorów rozpinają całą przestrzeń?

a) $(3, 1, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(0, 3, 2)$ w $\mathbb{R}^3$;

b) $(3, 1, 0, -2)$, $(5, 2, 2, -1)$, $(1, -1, 0, -2)$, $(5, 1, 1, -3)$, $(-7, -3, 1, 5)$, $(4, 1, -2, -5)$ w $\mathbb{R}^4$;

4 Niech $V \subset \mathbb{R}[x]$ będzie podprzestrzenią liniową składającą się z wielomianów stopnia ≤ 10 oraz spełniających

$$f(1) = f(2) = 0.$$

Znaleźć układ wektorów (tzn wielomianów) rozpinający V .

5 Wykazać, że jeśli w ciele $\mathbb{F}$ zachodzi $1 + 1 \neq 0$ to dla dowolnych wektorów $v, w \in V$ w przestrzeni liniowej nad $\mathbb{F}$ mamy $\text{lin}(v + w, v - w) = \text{lin}(v, w)$.

6 Dane wektory w $\mathbb{R}^3$: $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)$, $\beta_1 = (1, -1, 1)$, $\beta_2 = (4, 1, 2)$. Opisać równaniami $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2) \cap \text{lin}(\beta_1, \beta_2)$.

7 Niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisane przez równania $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ i $x_3 - x_4 = 0$. Niech V będzie najmniejszą podprzestrzenią $\mathbb{R}^4$ zawierającą W oraz wektor $(1, 1, 1, 2)$. Znaleźć układ rozpinający V . Znaleźć równanie przestrzeni zawierającej V .

8 Niech V będzie przestrzenią liniową, $\beta \in V$ oraz $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ będzie układem liniowo niezależnym. Wykazać że $\beta \in \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta$ jest liniowo zależny.

Zadania do rozwiązania przy tablicy 13–14 listopada

1 Niech $V \subset \mathbb{R}^7$ będzie podprzestrzenią opisaną równaniami

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 = 0 \end{cases}$$

Znajdź równanie opisujące poprzeczną rozpiętą przez V i wektor $(2, 1, 2, 1, 2, 1, 2)$.

2 Niech x, y, z, s, t będą współrzędnymi w przestrzeni $\mathbb{R}^5$. Znajdź bazę przestrzeni liniowej opisaną przez równania:

$$\begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 0 \\ x - 8y + 5z + \lambda s + t = 0 \end{cases}$$

zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{R}$.

3 Dane są wektory $\alpha_1 = (-1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 2)$, $\alpha_3(t) = (-3, t, 0)$.

a) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ układ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3(t)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$?

b) dla każdego t takiego jak w a) znaleźć współrzędne wektora $\beta = (1, 1, -1)$ w tej bazie.

c) Dla jakich wartości t wektor $\alpha_3(t)$ jest kombinacją liniową α_1 i α_2 ? Znaleźć tę kombinację.

4 Niech $\alpha_1 = (1, 3, 1)$, $\alpha_2 = (2, 2, 1)$, $\alpha = (-3, 0, 1)$. Znaleźć (jeśli istnieje) taki wektor α_3 , że układ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jest bazą $\mathbb{R}^3$ i wektor α ma w tej bazie współrzędne 2, -3, 1.

b) to samo polecenie gdy $\beta = (3, 5, 2)$.

5 Dane są dwie podprzestrzenie w $\mathbb{R}^4$:

$$V = \begin{cases} x + 2y - 3w = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}, \quad W = \begin{cases} 3x + y - z - 3w = 0 \\ x + y - z - w = 0 \end{cases}$$

Opisać równaniami

$$V + W = \{v + w \in \mathbb{R}^4 \mid v \in V, w \in W\}.$$

Znaleźć wymiary przestrzeni $V + W$ i $V \cap W$.

6 Niech $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisane przez równania $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ i $x_3 - x_4 = 0$. Czy wektory $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 2)$ można dopełnić wektorem $\beta \in W$ do bazy $\mathbb{R}^4$. Jeśli tak, to podać przykład takiego wektora.

7 Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subset K^n$ będzie układem wektorów liniowo niezależnych. Niech $V \subset K^n$ będzie podprzestrzenią wymiaru $n - k$. Udowodnić, że układ $\mathcal{A}$ można dopełnić do bazy wektorami z V wtedy i tylko wtedy gdy $V \cap \text{lin } \mathcal{A} = \{0\}$.

8 Rozważamy przestrzeń liniową ciągów o wyrazach rzeczywistych, które utożsamiamy z funkcjami $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Dla $\lambda \in \mathbb{R}$ definiujemy funkcję

$$f_\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\lambda(n) = n^\lambda.$$

Czy układ

$$\{f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

jest liniowo niezależny?

9 (*) Niech $k, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. Udowodnić, że wyrażenie

$$\frac{(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{k-1})}{(p^k - 1)(p^k - p)(p^k - p^2) \dots (p^k - p^{k-1})}$$

jest wielomianem zmiennej p .

Zadania do rozwiązania przy tablicy 20–21 listopada

1 (Zadanie nieomówione ostatnim razem, rozszerzone o drugi punkt.)

a) Rozważamy przestrzeń liniową $\mathbb{R}^\infty$ ciągów o wyrazach rzeczywistych, które utożsamiamy z funkcjami $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Dla $\lambda \in \mathbb{R}$ definiujemy funkcję

$$f_\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\lambda(n) = n^\lambda.$$

Czy układ

$$\{f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

jest liniowo niezależny?

b) Czy układ

$$\{f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

jest bazą $\mathbb{R}^\infty$.

2 Znaleźć rząd macierzy

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$$

Można wykonywać operacje elementarne na wierszach i kolumnach. Postarać się zrobić jak najmniejszą ilość operacji. Unikać ułamków.

3 Niech $a, b, c, d, e \in K$ będą parami różnymi elementami ciała K . Udowodnić, że macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & e \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & e^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & e^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & e^4 \end{pmatrix}$$

ma rząd 5.

4 Przypuśćmy, że macierz A ma m wierszy oraz rząd A jest równy r . Niech $s \leq m$. Wykazać, że wybierając z A dowolne s wierszy otrzymujemy macierz o rzędzie nie mniejszym niż $r + s - m$.

5 Dane są dwie macierze A, B takiego samego rozmiaru. Wykazać, że rząd $A + B$ jest nie większy niż suma rzędów A i B

$$r(A + B) \leq r(A) + r(B).$$

Podać przykład, gdy zachodzi równość oraz inne „ciekawe” przykłady, gdy mamy ostrą nierówność.

6 Niech $A = \{a_{i,j}\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ będzie macierzą rozmiaru $m \times n$. Załóżmy, że rząd macierzy jest równy r . Wykazać, można wykreślić z A $m - r$ wierszy i $n - r$ kolumn, a to co zostanie dalej będzie miało rząd r . Innymi słowy: istnieją takie liczby $i_1, i_2, \dots, i_r$ oraz $j_1, j_2, \dots, j_r$, że macierz

$$B = \{a_{i_a, j_b}\}_{1 \leq a \leq r, 1 \leq b \leq r}$$

ma rząd r .

Zadania do rozwiązania przy tablicy 27–28 listopada

1 Nad ciałem $\mathbb{Z}_{17}$ dany jest układ równań liniowych, którego macierz rozszerzona wygląda tak

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ s & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & t \end{array} \right]$$

W zależności od $s, t \in \mathbb{Z}_{17}$ orzec ile jest rozwiązań tego układu.

2 a) Niech $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Definiujemy podprzestrzenie liniowe $\mathbb{R}^n$

$$W_1 = \text{lin}\{(a_1, a_2, \dots, a_n)\}, \quad W_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0)\}.$$

Czy $V = W_1 \oplus W_2$?

b) Czy jeśli zastąpić $\mathbb{R}$ ciałem $\mathbb{C}$ to odpowiedź będzie taka sama?

3 Niech

$$W_1 = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 0 \end{cases} \quad W_2 = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

będą podprzestrzeniami w $\mathbb{R}^4$. Sprawdzić czy $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$. Czy wektor $\alpha = (6, -9, -4, -1)$ można zapisać jako $\alpha_1 + \alpha_2$, dla pewnych $\alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2$.

4 Załóżmy, że V_1, V_2, V_3 są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V . Wykazać, że

$$(V_1 \cap V_2) + (V_2 \cap V_3) + (V_3 \cap V_1) \subset (V_1 + V_2) \cap (V_2 + V_3) \cap (V_3 + V_1).$$

Podać przykład, w którym powyższej inkluzji nie można zastąpić równością.

5 Niech $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ będzie zbiorem funkcji $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Niech

$$V_1 = \{f \in V \mid \forall x \in \mathbb{R} \ f(-x) = f(x)\} \quad \text{tzn funkcje parzyste,}$$

$$V_2 = \{f \in V \mid \forall x \in \mathbb{R} \ f(-x) = -f(x)\} \quad \text{tzn funkcje nieparzyste.}$$

Wykazać, że $V = V_1 \oplus V_2$.

6 Niech $\xi \in \mathbb{C}$ będzie pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia 5. Definiujemy podprzestrzeń $\mathbb{C}^5$

$$V = \text{lin}\{(1, 1, 1, 1, 1), (1, \xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4)\}.$$

Wskazać podprzestrzeń $W \subset \mathbb{C}^5$ (podając jej bazę) taką, że $\mathbb{C}^5 = V \oplus W$.

Zadania do rozwiązania przy tablicy 4–5 grudnia

1 Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dla jakich a, b, c ta funkcja jest przekształceniem liniowym w sensie algebry liniowej?

2 Dane $a, b \in \mathbb{R}$. Niech $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie funkcją zadaną wzorem

$$f(x, y, z) = (x + y + z + a, x + 2y + 3z + b).$$

Dla jakiego a, b jest to przekształcenie liniowe w sensie algebry liniowej?

3 Niech $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie funkcją zadaną wzorem

$$f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z, x + y - 2z).$$

Znaleźć bazy jądra i obrazu.

4 Znaleźć wzór na symetrię $\mathbb{R}^3$ względem płaszczyzny $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ przeprowadzającą wektor $(1, 1, 1)$ na $(-1, -1, -1)$. Znaleźć obraz wektora $(4, 2, 1)$.

5 Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $f(1, 3) = (2, 4, 1)$ i $f(2, 1) = (5, 3, 2)$. Znaleźć wzór na f . Znaleźć $f(1, 1)$.

6 Niech $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takim, że

$$f(1, 1, 1) = (6, 15, 21), \quad f(1, 2, 3) = (14, 32, 46), \quad f(1, -1, 1) = (2, 5, 7)$$

Znaleźć obrazy wektorów standardowej bazy. Znaleźć jądro i obraz.

7 Znaleźć przykłady przekształceń $f : V \rightarrow V$ pewnej przestrzeni (koniecznie nieskończenie wymiarowej, np $V = K[x]$) takie, że

- a) $\ker(f) = 0$, ale funkcja nie jest "na".
- b) funkcja jest "na", ale $\ker(f) \neq \{0\}$.

Zadania do rozwiązania przy tablicy 11 grudnia

Przypomnienie z wykładu: Przekształcenie f jest izomorfizmem, jeśli jest monomorfizmem i epimorfizmem, lub równoważnie, jeśli $\ker(f) = 0$ i obraz jest równy przeciwdziedzinnie.

1 Niech $\xi \in \mathbb{C}$ będzie pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia 3. Funkcja $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ zadana wzorem

$$f((x, y, z)) = (x + \xi y + \xi^2 z, \xi^2 x + y + \xi z, \xi x + \xi^2 y + z).$$

Wskazać bazy jądra i obrazu f .

2 Wskazać przykład izomorfizmu $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ takiego, że $f((0, i, 1)) = (1, 1, 1 + i)$.

3 Dany jest parametr $r \in \mathbb{R}$ Niech $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5x_1 - x_2 + rx_3 + 5x_4, 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + rx_4, 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4, x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 3x_4).$$

Dla jakiego r ta funkcja jest izomorfizmem.

4 Definiujemy funkcję określoną na przestrzeni wielomianów:

$$\phi : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x].$$

Dla $f \in \mathbb{R}[x]$ niech

$$\phi(f)(x) = 2f(x) - f(x-1) - f(x+1).$$

Znaleźć $\ker(\phi)$ i $\text{im}(\phi)$.

5 Niech f będzie niezerową funkcją liniową $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ oraz $v \in V$ wektorem, takim że $f(v) \neq 0$. Wykazać, że $V = \ker(f) \oplus \text{lin}\{v\}$.

Zadania do rozwiązania przy tablicy 12 grudnia

6 Dane dwie podprzestrzenie liniowe $W_1, W_2 \subset V$. Załóżmy, że $\dim W_1 = \dim W_2 < \infty$. Czy istnieje taka funkcja liniowa $f : V \rightarrow V$ będąca izomorfizmem, że $f(W_1) = W_2$?
(Rozpatrzyć osobno przypadek $\dim V < \infty$ i $\dim V = \infty$.)

7 Niech $f : V \rightarrow W$ i $g : W \rightarrow V$ będą przekształceniami liniowymi. Załóżmy, że $f \circ g = \text{id}_W$.
— Czy f i g są izomorfizmami?
— Czy któraś z tych funkcji jest monomorfizmem?
— Czy któraś z tych funkcji jest epimorfizmem?
— Przypuśćmy, że $V = W$. Jaka będzie odpowiedź na powyższe pytania?

8 Dane są trzy funkcje liniowe $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^{11} \rightarrow \mathbb{R}^5$. Czy istnieje niezerowy wektor $\alpha \in \mathbb{R}^{11}$ taki, że

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f_3(\alpha)?$$

(Postarać się uogólnić ten przykład na wyższe wymiary.)

Zadania do rozwiązania przy tablicy 18 grudnia

Oznaczenie: $M(m \times n; \mathbb{K})$ oznacza zbiór macierzy wymiaru $m \times n$ o wyrazach z $\mathbb{K}$.

1 Niech $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$. Czy f jest izomorfizmem? Jeśli tak, to znaleźć przekształcenie odwrotne.

2 Znaleźć macierz $Y \in M(3 \times 3; \mathbb{K})$ taką, że

$$2Y \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + Y \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3 Znaleźć wszystkie macierze $X \in M(3 \times 3; \mathbb{K})$ spełniające równanie

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X.$$

4 Dla $a, t \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ obliczyć $\begin{pmatrix} a & t & 0 \\ 0 & a & t \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^n$.

5

(i) Wskazać przekształcenia $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takie, że $\phi\psi \neq 0$, ale $\psi\phi = 0$.

(ii) Wskazać macierze kwadratowe 2×2 takie, że $AB \neq 0$, ale $BA = 0$.

Zadania do rozwiązania przy tablicy 19 grudnia

6 Znaleźć X rozmiaru 2×2 spełniające równanie

$$a) X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad b) X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

7 Wykazać, że jeśli przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ spełnia $\phi^2 = Id$, to istnieje baza w której przekształcenie ma macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

(diagonalna macierz z 1 i -1 na przekątnej).

8 Wykazać, że jeśli przekształcenie $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ spełnia $\phi^2 = -Id$, to w pewnej bazie ma macierz

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadania do rozwiązania przy tablicy 8 stycznia

- 1 Przedstawić macierz $A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ jako iloczyn macierzy operacji elementarnych.

Przypomnienie: macierze operacji elementarnych 2×2 to

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \text{dla } a \in \mathbb{K} \text{ oraz } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Szukane przedstawienie macierzy uzyskać stosując znane (i lubiane) operacje elementarne na macierzach. Czy każdą macierz rozmiaru 2×2 można przedstawić jako iloczyn macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{dla } a \in \mathbb{K} \text{ oraz } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

- 2 Niech $\varphi : V \rightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym. spełniającym $\varphi^2 = \varphi$. Niech $\psi = \text{id}_V - \varphi$. Udowodnić, że $\psi^2 = \psi$. Udowodnić, że $\varphi - \psi$ jest izomorfizmem i znaleźć $(\varphi - \psi)^{-1}$.

- 3 Wskazać przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spełniające dwa warunki:

- $\text{im}(\varphi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$,
- $\text{im}(\varphi^2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0, x - y + 2z = 0\}$.

- 4 Wskazać przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spełniające 3 warunki

$$1) \quad (-1, 2, 1) \in \ker(\varphi), \quad 2) \quad \text{im}(\varphi) = \text{lin}\{(1, 1, 2)\}, \quad 3) \quad \varphi^3 = 0.$$

Wykazać, że przekształcenie φ spełniające powyższe warunki musi ponadto spełniać: $\varphi^2 = 0$ oraz $\dim(\ker(\varphi)) = 2$.

- 5 Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n oraz $\varphi : V \rightarrow V$ przekształceniem liniowym takim, że $\varphi^m = 0$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że $\psi^n = 0$.

Wskazówka: rozpatrzyć ciąg podprzestrzeni $V_k = \text{im}(\varphi^k)$. Udowodnić, że jeśli $V_k = V_{k+1}$ to $V_k = V_r$ dla $r \geq k$.

Zadania do rozwiązania przy tablicy 9 stycznia

Macierz przejścia (zamiany współrzędnych) od bazy $\mathcal{A}$ do bazy $\mathcal{B}$ przestrzeni V : macierz identyczności V w bazach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ (wektory $\mathcal{A}$ wyrażamy jako kombinacje liniowe wektorów $\mathcal{B}$ i otrzymane współrzędne ustawiamy w kolumnach).

- 6 Niech $\mathcal{A} = \{(1, 1, 1), (2, 1, 3), (1, 0, 5)\}$ i $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x + 2y, y + 3z)$. Znaleźć $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{st}$, t.j. macierz przekształcenia φ z bazy $\mathcal{A}$ do bazy standardowej. Ponadto niech $\mathcal{B} = \{(1, 2), (4, 1)\}$. Znaleźć macierz przejścia z bazy standardowej do $\mathcal{B}$ oraz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

Część b) To samo dla: $\mathcal{A} = \{(1, 2), (3, 1)\}$. $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (1, 4, 9)\}$ oraz $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x + y, x - y, x + 2y)$.

- 7 (Zadanie z kolokwium 2016 r.) Niech

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \alpha_2 = (1, 1, 1, 0), \quad \alpha_3 = (1, 1, 0, 0), \quad \alpha_4 = (1, 0, 0, 0),$$

oraz niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ i niech $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym spełniającym

$$\ker(\varphi) = \text{lin}(\alpha_1, \alpha_4), \quad \varphi(\alpha_2) = \alpha_1, \quad \varphi(\alpha_3) = \alpha_2.$$

Znaleźć: $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, $M(\varphi)_{st}^{st}$, oraz rząd przekształcenia φ^k dla $k = 1, 2, 3$.

- 8 Niech V_1, V_2, W będą przestrzeniami liniowymi oraz $L(V_i, W)$ przestrzenią przekształceń liniowych, $i = 1, 2$. Dla przekształcenia liniowego $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ definiujemy $\theta_\varphi : L(V_2, W) \rightarrow L(V_1, W)$ wzorem $\theta(\psi) = \psi \circ \varphi$. Udowodnić, że jeśli φ jest izomorfizmem, to θ_φ jest izomorfizmem. Czy z tego, że θ_φ jest izomorfizmem wynika, że φ jest izomorfizmem?

Wykorzystać charakteryzację izomorfizmów: [Kategoryjna definicja¹.] Przekształcenie $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $\rho : V_2 \rightarrow V_1$ takie, że $\varphi \circ \rho = \text{id}_{V_2}$ i $\rho \circ \varphi = \text{id}_{V_1}$.

¹Kategoryjna – czyli bez użycia wektorów, mająca zastosowanie nie tylko w algebrze liniowej.

Zadania do rozwiązania przy tablicy 15 stycznia

1 Obliczyć wyznaczniki macierzy

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 & -5 \\ -4 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

37, -10, -84, -130

2 Obliczyć wyznacznik macierzy w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 5 & t & 1 \\ 1 & 2 & t & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Obliczyć wyznacznik macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 128 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Wykazać, że $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$.

Zadania do rozwiązania przy tablicy 16 stycznia

5 Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ będą elementami ciała. Obliczyć wyznacznik macierzy $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

6 Obliczyć wyznacznik $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$$

7 Obliczyć wyznacznik $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(Obliczyć wartość wyznacznika dla kilku pierwszych wartości n i udowodnić ogólny wzór indukcyjnie.)

Zadania do rozwiązania przy tablicy 22 stycznia

1 Niech A będzie macierzą antysymetryczną, tzn $A^T = -A$ rozmiaru $n \times n$. Wykazać, że jeśli n jest nieparzyste, to $\det(A) = 0$. Przypuśćmy, że $n = 4$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix} \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$$

Wykazać, że $\det(A) \geq 0$ i jest kwadratem liczby całkowitej (przedstawić $\det(A)$ jako kwadrat pewnego wyrażenia zależnego od a, b, c, d, e, f).

2 Niech A i B będą macierzami kwadratowymi $n \times n$. Wskazać, jak za pomocą elementarnych operacji na wierszach można otrzymać macierz $\begin{bmatrix} A & -I \\ AB & 0 \end{bmatrix}$ z macierzy $\begin{bmatrix} A & -I \\ 0 & B \end{bmatrix}$. Wywnioskować twierdzenie Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu.

3 Niech A, B będą kwadratowymi macierzami takimi, że $AB = BA$, $A^k = 0$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ oraz B jest odwracalna. Udowodnić, że $A + B$ jest odwracalna. Czy założenie, że $AB = BA$ jest konieczne?

4 Niech $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Przypuśćmy, że macierz kwadratowa A spełnia tożsamość $(A - aI)(A - bI) = 0$. Udowodnić, że A jest odwracalna. Dla $a = 1$, $b = 7$ wskazać A^{-1} .

5 Niech A będzie kwadratową macierzą $n \times n$ o współczynnikach rzeczywistych bądź zespolonych. Udowodnić, że szereg

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

jest zbieżny.

Zadania do rozwiązania przy tablicy 23 stycznia

6 a) Obliczyć $\exp(A)$ dla $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ i $A = \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix}$.

b) Załóżmy A i B są kwadratowymi macierzami $n \times n$, oraz $AB = BA$. Udowodnić, że

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$$

c) Niech C będzie macierzą odwracalną. Udowodnić, że $\exp(CAC^{-1}) = C \exp(A) C^{-1}$.

7 Definiujemy ślad macierzy $\text{tr}(A)$ jako sumę wyrazów na przekątnej. Udowodnić $\det(\exp(A)) = e^{\text{tr}(A)}$. Wskazówka: sprawdzić ten wzór dla macierzy górnotrójkątnych.

8 Niech N będzie macierzą nilpotentną, tzn taką, że istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $N^k = 0$. Znaleźć macierz A taką, że $\exp(A) = I + N$.

Zadanie domowe na 27.10

20 października 2023

Zadanie 1

Niech $n \geq 3$. Rozwiąż, w zależności od n , rzeczywisty układ równań n zmiennych:

$$\begin{cases} x_i + x_{i+1} = 1 & (1 \leq i \leq n-1) \\ x_n + x_1 = 0. \end{cases}$$

Zadanie 2

Znajdź rozwiązanie ogólne następującego układu równań liniowych o współczynnikach w $\mathbb{Z}_{17}$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4. \end{cases}$$

Zadanie 3

Znajdź wszystkie rozwiązania, wyznaczając części rzeczywiste i zespolone oraz uzasadniając obliczenia odpowiednio.

- $3|z|z = \bar{z}^3$,
- $z = \left(\frac{-2-2i\sqrt{3}}{1+i}\right)^8$,
- $z^4 - 4z^3 + 11z^2 - 14z + 10 = 0$, wiedząc że jednym z rozwiązań jest $1 - 2i$.

Zadanie 4

Znajdź wielomian $f(z)$ o całkowitych współczynnikach, którego jedynymi pierwiastkami są pierwiatki pierwotne z 1 stopnia 15.

Przypomnienie:

Liczba $z \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia n wtedy i tylko wtedy, gdy $z^n = 1$ oraz $z^m \neq 1$ dla $0 < m < n$.

Zadania domowe na 14 listopada

Zadanie 1

Rozważamy zbiór liczb rzeczywistych jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{Q}$. Udowodnić, że układ $\{1, \sqrt[3]{7}, (\sqrt[3]{7})^2\}$ jest liniowo niezależny.

Zadanie 2

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem p -elementowym oraz niech $W_1, W_2, W_3 \subset V$ będą właściwymi podprzestrzeniami liniowymi.

- Załóżmy, że $2 < p < \infty$ oraz $|V| < \infty$. Udowodnić, że $|W_1 \cup W_2 \cup W_3| < |V|$.
- Wskazać przykład trzech właściwych podprzestrzeni liniowych W_1, W_2, W_3 takich, że $W_1 \cup W_2 \cup W_3 = V$.
- Uzasadnić, że jeśli ciało bazowe ma co najmniej 3 elementy (np. nieskończenie wiele elementów), to nie istnieją podprzestrzenie W_1, W_2, W_3 o powyższych własnościach.

Zadanie 3

Dane są cztery wektory w $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 2, 1)$, $w_1 = (2, 3, 4)$, $w_2 = (2, a, 0)$. W zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$ opisać układem równań liniowych przestrzeń $V \cap W$, gdzie $V = \text{lin}(v_1, v_2)$ $W = \text{lin}(w_1, w_2)$.

Zadanie 4

Dane są 3 wektory w $\mathbb{C}^4$ $u = (5, 3, 7, t)$, $v = (1, 3, 3, 4)$, $w = (2, 3, 4, 1)$. W zależności od parametru $t \in \mathbb{C}$ orzec czy te wektory są niezależne. Znaleźć bazę przestrzeni rozpiętej przez wektory u , v , w .

Zadania domowe na ~~28 listopada~~ 5 grudnia

Zadanie 1

Znajdź bazę podprzestrzeni $V \subset \mathbb{Z}_7^4$ opisanej poniższym układem równań.

$$\begin{cases} 6x + 2y + 4z + 6w &= 0 \\ 6x + 6y + z + w &= 0 \\ 2x + y + 4z + w &= 0 \end{cases}$$

Następnie podaj wymiar V , oraz dopełnij znaną bazę do bazy $\mathbb{Z}_7^4$.

Zadanie 2

Oblicz rząd macierzy o współczynnikach w $\mathbb{Q}$ w zależności od parametru $t \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{pmatrix} t+4 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & t+10 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Rozważmy przestrzeń liniową rozpiętą przez kolumny powyższej macierzy, czy dla każdego $t \in \mathbb{Q}$ jest to ta sama przestrzeń? Rozważmy jednorodny układ równań opisany przez powyższą macierz, jaki jest wymiar przestrzeni rozwiązań w zależności od parametru $t \in \mathbb{Q}$?

Zadanie 3

Dane są wektory w $\mathbb{R}^4$

$$(-13, -3, 11, 5), (-6, -1, 2, 5), (1, 1, -7, 5), (3, 1, -5, 1), (4, 1, -4, -1), (8, 3, -16, 5).$$

Wybrać spośród nich maksymalny układ niezależny. Czy można ten układ dopełnić do bazy wektorami z podprzestrzeni opisanej równaniem

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0?$$

Zadanie 4

Niech A, B będą macierzami o współczynnikach rzeczywistych i jednakowej liczbie wierszy. Udowodnij, że:

$$r \begin{pmatrix} A & B \\ 2A & 5B \end{pmatrix} = r(A) + r(B),$$

gdzie $r(X)$ oznacza rząd macierzy.

Zadania domowe na ~~19 grudnia~~ 21 grudnia g. 14:15

(proszę zostawić zadania w kopercie na moich drzwiach - pokój 5560)

Zadanie 1

Czy istnieje funkcja liniowa $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ taka, że

$$f((1, 2, -3)) = (-4, -4, -4), \quad f((3, 2, -4)) = (-5, -2, 1), \quad f((1, -2, 1)) = (0, 0, 0), \quad f((1, 1, 1)) = (6, 15, 24) ?$$

Jeśli istnieje, to podać jej wzór we współrzędnych. Uzasadnić, że f jest wyznaczona jednoznacznie. Znaleźć obrazy standardowych wektorów bazowych. Wypisać macierz przekształcenia.

Zadanie 2

Dana jest funkcja liniowa $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadana wzorem

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 10x_4, 3x_1 + 4x_3 - 2x_4, -4x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 9x_4).$$

Znaleźć bazy jądra i obrazu. Opisać równaniami obraz.

Zadanie 3

Dana jest funkcja liniowa $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ zależna od parametru $r \in \mathbb{R}$. Funkcja jest zadana wzorem

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + 6x_3, x_1 + 2x_2 + 5x_3, rx_2 + x_1 + 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + 4x_3).$$

Dla jakiego parametru r ta funkcja jest monomorfizmem? Jeśli dla pewnego parametru nie jest monomorfizmem, to znaleźć bazę jądra.

Zadanie 4

Dane są trzy monomorfizmy $f, g, h : \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^7$. Czy istnieje wektor niezerowy $\beta \in \mathbb{C}^7 \setminus \{0\}$ oraz wektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}^5$ takie, że

$$f(\alpha_1) = \beta, \quad g(\alpha_2) = \beta, \quad h(\alpha_3) = \beta.$$

Zadania domowe na 22 stycznia

Zadanie 1

Niech $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym, którego macierz w bazie standardowej jest równa

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Znaleźć macierz przekształcenia ϕ w bazie

$$\alpha_1 = (1, -1, 0, 0), \quad \alpha_2 = (0, 1, -1, 0), \quad \alpha_3 = (0, 0, 1, -1), \quad \alpha_4 = (0, 0, 1, 1).$$

Wskazać podprzestrzeń $V \subset \mathbb{R}^4$ składającą się z wektorów takich, że $\phi(v) = 2v$. Znaleźć bazę V . Znaleźć rozkład $\mathbb{R}^4$ na sumę prostą $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$ o tej własności, że $\phi(W) \subset W$.

Zadanie 2

Obliczyć wyznacznik macierzy $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 3

Dane są macierze

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Obliczyć $\det(B)$. Obliczyć wyznacznik macierzy

$$(B^T)^4 \cdot (A_t)^3 \cdot B^{-4}$$

w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4

- a) Znaleźć macierz rozmiaru 3×3 składającą się z 0 i 1 o możliwie największym wyznaczniku.
- b)* Czy istnieje macierz 3×3 składająca się z liczb z przedziału $[0,1]$, której wyznacznik byłby większy od 2?