

GAL1, zima 2024/2025 ¹
Zadania na pierwszy tydzień (2.10-9.10)

Układy równań liniowych, macierze

Zadanie 1.

Rozwiąż układy równań

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 1 \\ 7x + 8y + 9z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

Zadanie 2.

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$$

Zadanie 3.

Znajdź rozwiązania układów równań w zależności od parametrów a, b, c .

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + y + z = a - 1 \\ x + ay + z = 1 - a \\ x + y + az = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + y + z = a \\ x + by + z = b \\ x + y + cz = c \end{cases}$$

Zadanie 4.

- (a) Znajdź wszystkie wielomiany stopnia co najwyżej 3, spełniające warunki

$$f(-2) = 2 \quad f(-1) = 1 \quad f(1) = 5 \quad f(2) = -2.$$

- (b) Niech x, y, z będą różnymi liczbami rzeczywistymi. Znajdź wszystkie wielomiany stopnia co najwyżej 2, spełniające warunki

$$f(x) = 7 \quad f(y) = 4 \quad f(z) = 9.$$

Zadanie 5.

Niech $x_1, \dots, x_n$ będą różnymi liczbami rzeczywistymi, a $a_1, \dots, a_n$ dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Znajdź wzór ogólny na wielomian stopnia co najwyżej $n - 1$ spełniający warunki $f(x_i) = a_i$ dla $i = 1, \dots, n$. Czy taki wielomian zawsze istnieje? Czy jest jednoznacznie wyznaczony?

Wskazówka: można zacząć od przypadków $n = 2, 3$ i na tej podstawie spróbować odkryć ogólny wzór.

¹Zadania wybrane przez Marię Donten-Bury, Andrzeja Webera i Jarosława Wiśniewskiego

Zadanie 6.

- (a) Wykaż, że istnieje pięć punktów $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \in \mathbb{R}^2$, przez które przechodzi dokładnie jedna stożkowa, czyli krzywa o równaniu $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, gdzie $a, \dots, f \in \mathbb{R}$ a (x, y) to współrzędne w $\mathbb{R}^2$.
- (b) Dla pięć punktów $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \in \mathbb{R}^2$ o powyższej własności wykaż, że istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że jeśli pięć punktów $q_1, \dots, q_5$ spełnia $|p_i - q_i| < \varepsilon$ dla $i = 1, \dots, 5$, to też ma powyższą własność.

Zadanie 7.

Wykaż, że jeśli okrąg na płaszczyźnie przechodzi przez 3 punkty o współrzędnych wymiernych, to współrzędne jego środka oraz kwadrat promienia są liczbami wymiernymi.

Pierścienie przemienne i ciała

Pierścień przemienny R to zbiór z wyróżnionymi elementami $0, 1 \in R$ oraz działaniami, czyli funkcjami $+: R \times R \rightarrow R$, $(a, b) \mapsto a + b$ oraz $\cdot: R \times R \rightarrow R$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$, nazywanymi odpowiednio dodawaniem i mnożeniem, spełniającymi następujące warunki:

- działania są łączne, czyli dla dowolnej trójki elementów $a, b, c \in R$ zachodzi $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- działania są przemienne, czyli dla dowolnych $a, b \in R$ zachodzi $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$,
- 0 i 1 są elementami neutralnymi dla dodawania i mnożenia, odpowiednio, czyli dla dowolnego $a \in R$ zachodzi $a + 0 = a$ oraz $a \cdot 1 = a$,
- zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania, czyli dla każdej trójki $a, b, c \in R$ zachodzi $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- dla każdego $a \in R$ istnieje element przeciwny, oznaczany $-a$, taki że $a + (-a) = 0$,
- jeśli dodatkowo dla każdego $a \in R \setminus \{0\}$ istnieje element odwrotny a^{-1} , taki że $a \cdot a^{-1} = 1$, to R nazywamy ciałem.

Proszę podać znane przykłady pierścieni przemiennych i ciał (oprócz tych zdefiniowanych poniżej).

Zadanie 8.

Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ definiujemy pierścień reszt z dzielenia przez n , jako zbiór $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ z operacjami dodawania i mnożenia modulo n , czyli w tym pierścieniu $a + b$ jest resztą z dzielenia przez n sumy liczb naturalnych $a + b$ i podobnie dla mnożenia. Pokaż, że w ten sposób dostajemy pierścień przemienny. Dla jakich wartości n pierścień $\mathbb{Z}_n$ jest ciałem? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 9.

Wykaż, że dany układ równań ma jednoznaczne rozwiązanie w $\mathbb{Z}_p$ dla dowolnej liczby pierwszej p , poza skończeniem wieloma wartościami.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Zadanie 10.

Sprawdź podstawowe własności pierścieni przemiennych (i ciał):

- (a) elementy neutralne 0 i 1 są wyznaczone jednoznacznie: jeśli dla pewnego $a \in R$ zachodzi $\forall b \in R \ a + b = b$, to $a = 0$
- (b) elementy przeciwne (i odwrotności) są wyznaczone jednoznacznie
- (c) $\forall a \in R : a \cdot 0 = 0$
- (d) jeśli $0 = 1$ to $R = \{0\}$, taki pierścień nazywamy trywialnym

- (e) jeśli R jest ciałem, to $a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$
- (f) podaj przykład pierścienia przemiennego, w którym nie zachodzi powyższa implikacja; element $a \in R$ nazywamy dzielnikiem zera jeśli $\exists b \in R$ taki, że $a \cdot b = 0$

Zadanie 11.

Pierścień przemienny bez nietrywialnych ($\neq 0$) dzielników zera nazywamy dziedziną (dziedziną całkowitości). Pokaż, że w dziedzinie zachodzi własność skracania: jeśli $a \neq 0$ oraz $a \cdot b = a \cdot c$, to $b = c$. Pokaż, że skończona dziedzina jest ciałem.

Zadanie 12.

Charakterystyką ciała k nazywamy najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią $n = \text{char } k$, że suma n jedynek jest zerowa: $\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_n = 0$. Jeśli takie n nie istnieje, to mówimy, że $\text{char } k = 0$.

- (a) Wykaż, że charakterystyka ciała jest 0 lub liczbą pierwszą.
- (b) Wykaż, że $\mathbb{Z}_p$ jest najmniejszym ciałem charakterystyki p , tzn. jest zawarte w każdym ciele charakterystyki p .
- (c) Jakie jest najmniejsze ciało charakterystyki 0?
- (d) Znajdź tabelki operacji dodawania i mnożenia na zbiorze czteroelementowym zadające strukturę ciała.
- (e) Udowodnij, że jeśli ciało skończone ma charakterystykę p , to ma p^n elementów dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.
(Dla chętnych: zastanów się, jak skonstruować ciało o p^n elementach.)
- (f) Dla jakich ciał jest prawdą, że jeśli kwadrat sumy dwóch liczb jest równy sumie ich kwadratów, to jedna z tych liczb musi być zerem?

GAL1, zima 2024/2025

Zadania na drugi tydzień

Ciała

Ciała skończone

Zadanie 1.

Sprawdź, że równanie $x^2 + x + 1 = 0$ nie ma rozwiązania w ciele $\mathbb{Z}_2$. Znajdź ciało, które ma 4 elementy, w którym to równanie ma rozwiązanie: podaj tabelkę dodawania i mnożenia. Czy każde równanie kwadratowe ma rozwiązanie w tym ciele?

Zadanie 2.

Niech p będzie liczbą pierwszą.

- (a) Ile rozwiązań ma równanie $x^p - x = 0$ w ciele $\mathbb{Z}_p$.
- (b) Oblicz współczynniki wielomianu $\prod_{k=0}^{p-1} (x - k) \in \mathbb{Z}_p[x]$

Zadanie 3.

- (a) Sprawdź, że równanie $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 1$ nie ma rozwiązania w ciele $\mathbb{Z}_5$.
- (b) Niech K będzie ciałem skończonym. Wskaż wielomian dodatniego stopnia, który nie ma pierwiastka w K .

Zadanie 4.

Pokaż, że w ciele skończonym K każdy element jest sumą kwadratów dwóch elementów, czyli

$$\forall a \in K \quad \exists b, c \in K : a = b^2 + c^2$$

Wskazówka: *Rozpatrzć oddzielnie przypadek gdy $1 + 1 = 0$, tzn $\text{char}(K) = 2$. Gdy $\text{char}(K) \neq 2$ obliczyć, ile w ciele jest kwadratów.*

Rozszerzenia ciała liczb wymiernych

Zadanie 5.

Rozszerzenia kwadratowe $\mathbb{Q}$. Niech u będzie liczbą naturalną bezkwadratową, czyli niepodzielną przez kwadrat liczby $\neq 1$.

- (a) Pokaż, że podzbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{Q}(\sqrt{u}) = \{a + b\sqrt{u} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ jest ciałem. Znajdź regułę dodawania i mnożenia w tym ciele przy zapisywaniu liczb w postaci $a + b\sqrt{u}$.
- (b) Korzystając z powyższych obserwacji zdefiniuj strukturę ciała na zbiorze $\{a + b\sqrt{-u} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, gdzie $\sqrt{-u}$ ma spełniać warunek $\sqrt{-u} \cdot \sqrt{-u} = -u$.
- (c) Pokaż, że zbiór $K = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ jest ciałem; czy K jest rozszerzeniem kwadratowym jak wyżej?

Liczyby zespolone

Zadanie 6.

Wyznacz część rzeczywistą, część urojoną, sprzężenie, moduł i argument liczb zespolonych:

$$(a) \quad \frac{(1-i)^4 - i}{(1+i)^4 + i} \qquad (b) \quad \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 - i} \right)^{23}$$

Zadanie 7.

Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wykaż tożsamość równoległoboku

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

korzystając ze wzoru $|z|^2 = z\bar{z}$ i z działań na liczbach zespolonych.

Zadanie 8.

Załóżmy, że $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ spełniają $|z_1| = |z_2| = 1$ oraz $z_1 z_2 \neq -1$. Uzasadnij, że liczba

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$$

jest rzeczywista.

Zadanie 9.

Funkcja $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$ jest zadana wzorem $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$. Znajdź obraz $f(\mathbb{H}_+)$, gdzie

$$\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

Zadanie 10.

Mówimy, że $\xi \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem pierwotnym z jedynki stopnia n gdy $\xi^n = 1$ oraz $\xi^k \neq 1$ dla $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $k < n$. Zbiór pierwiastków pierwotnych z jedynki stopnia n oznaczmy przez P_n . Niech $C_n(x) = \prod_{\xi \in P_n} (x - \xi)$. Ten wielomian nazywa się cyklotomiczny.

(a) Oblicz współczynniki wielomianów $C_{12}(x)$, $C_{16}(x)$, $C_{30}(x)$.

(b) Udowodnij, że $C_n(x)$ ma współczynniki całkowite.

GAL1, zima 2024/2025

Zadania na trzeci tydzień

Zadanie 1.

Niech

$$\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{im}(z) > 0\}, \quad \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Pokaż, że funkcja $f(z) = -\frac{z+1}{z-1}$ przekształca $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}_+$ na $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{im} z > 0, \operatorname{re} z > 0\}$ i opisz obrazy prostych przechodzących przez zero i okręgów o środku w zerze.

Zadanie 2.

Założmy, że układ równań liniowych U o współczynnikach całkowitych ma dokładnie jedno rozwiązanie w ciele reszt $\mathbb{Z}_p$ dla dowolnej liczby pierwszej p . Czy istnieje całkowitoliczbowe rozwiązanie U ? Odpowiedź uzasadnij.

Wielomiany

Niech Y będzie dowolnym zbiorem a R pierścieniem lub ciałem. Na zbiorze wszystkich funkcji z Y do R , czyli $R^Y = \{f : Y \rightarrow R\}$, można zdefiniować strukturę pierścienia definiując działania „po wartościach”: definiujemy sumę funkcji f_1 i f_2 wzorem $\forall y \in Y (f_1 + f_2)(y) = f_1(y) + f_2(y)$, gdzie dodawania po prawej jest w R ; podobnie dla mnożenia, elementu przeciwnego i odwrotności (uzasadnij!). Funkcję $f : R \rightarrow R$ nazwiemy wielomianową jeśli istnieje wielomian $\tilde{f} = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ taki, że $\forall b \in R f(b) = \tilde{f}(b) = a_n \cdot b^n + \dots + a_1 \cdot b + a_0$, gdzie operacje po prawej stronie są w R . Przyporządkowanie $\tilde{f} \rightarrow f(b)$ nazywamy ewaluacją wielomianu $\tilde{f}$ w b .

Zadanie 3.

Niech K będzie ciałem i niech $f \in K[x]$ będzie wielomianem.

- (a) Załóżmy, że K jest ciałem skończonym. Czy przyporządkowanie wielomianowi funkcji wielomianowej $K[x] \ni \tilde{f} \rightarrow f \in K^K$ jest różnowartościowe? Czy każda funkcja $K \rightarrow K$ jest wielomianowa?
- (b) Załóżmy, że K jest ciałem nieskończonym. Czy przyporządkowanie wielomianowi funkcji wielomianowej $K[x] \ni \tilde{f} \rightarrow f \in K^K$ jest różnowartościowe? Czy każda funkcja $K \rightarrow K$ jest wielomianowa?
- (c) Niech $K = \mathbb{Z}_p$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Udowodnić, że dla $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ jeśli $\tilde{f} = 0$, to wielomian f jest podzielny przez $x^p - x$.

Zadanie 4.

Dany jest pewien wielomian f stopnia 2024 o współczynnikach wymiernych. Znajdź resztę z dzielenia wielomianu f przez wielomian $x^4 - 5x^2 + 4$ jeśli wiadomo, że $f(-2) = 2, f(-1) = 1, f(1) = 5, f(2) = -2$.

Zadanie 5.

PIERŚCIEŃ RESZT Z DZIELENIA PRZEZ WIELOMIAN. Rozpatrzmy ciało K i pierścień wielomianów $K[x]$, ustalmy wielomian $w \in K[x] \setminus \{0\}$ i na zbiorze wielomianów z $K[x]$ stopnia mniejszego niż $\deg(w)$ definiujemy dodawanie i mnożenie modulo w , tak jak w przypadku definicji pierścienia reszt $\mathbb{Z}_n$; tak otrzymany pierścień oznaczamy $K[x]/(w)$. Pokaż, że następujące warunki są równoważne

- (a) pierścień $R = K[x]/(w)$ nie ma dzielników zera (tzn. jeśli $ab = 0 \in R$ to $a = 0$ lub $b = 0$),
- (b) pierścień $R = K[x]/(w)$ jest ciałem,
- (c) wielomian w jest nierozkładalny czyli nie można go przedstawić jako produkt wielomianów mniejszego stopnia.

Pierwiastki, ciało algebraicznie domknięte

Zadanie 6.

Znaleźć zespolone pierwiastki wielomianów

(a) $x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25$,

(b) $x^7 + 8x^4 + 4x^3 + 32$.

Wskazówka: można rozpocząć od znalezienia rozkładu w $\mathbb{Z}[x]$ na czynniki możliwie niskiego stopnia. (Proszę nie używać Wolfram Mathematica itp.)

Zadanie 7.

Niech $n \geq 1$. Uzasadnij, że gdy dla $z \in \mathbb{C}$ zachodzi równość $(z+1)^n = (z-1)^n$, to $\operatorname{Re} z = 0$.

Zadanie 8.

Przypomnijmy, że ξ jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia n , jeśli $\xi^n = 1$ i $\xi^k \neq 1$ dla $0 < k < n$. Oblicz sumę pierwiastków pierwotnych z 1 stopnia n , jeśli

(a) $n = p$ jest liczbą pierwszą,

(b) $n = p^k$ dla pewnej liczby pierwszej p ,

(c) $n = p \cdot q$, gdzie p, q są pierwsze,

(d) n jest dowolną liczbą naturalną.

Zadanie 9.

Niech K będzie ciałem charakterystyki 0. Rozpatrzmy wielomian $w = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in K[x]$. Znajdź wzór na sumę kwadratów i na sumę sześciątów pierwiastków tego wielomianu w zależności od współczynników a_i . Załóżmy, że znamy sumę d -tych potęg pierwiastków wielomianów w , gdzie $d = 1, \dots, n$: czy można podać wzór na współczynniki a_i tego wielomianu?

Zadanie 10.

Przypomnijmy, że ciało K jest algebraicznie domknięte, jeśli każdy wielomian o współczynnikach w K ma pierwiastek w K .

(a) Pokaż, że ciało algebraicznie domknięte K jest nieskończone.

(b) Załóżmy, że ciało K jest algebraicznie domknięte, L jest ciałem zawierającym K oraz $a \in L \setminus K$. Najmniejsze podciało ciała L zawierające ciało K i element a oznaczamy $K(a)$. Pokaż, że istnieje bijekcja $K(x) \rightarrow K(a)$, która zachowuje działania.

GAL1, zima 2024/2025
Zadania na czwarty tydzień (25.10–31.10)

Jeszcze o pierwiastkach z jedności

Zadanie 1.

Rozpatrzmy zbiór pierwiastków stopnia n z jedności $\Delta_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Znajdź wartość iloczynu

$$\prod_{z \in \Delta_n} \left(z + \frac{1}{z}\right)$$

w zależności od wartości n .

Zadanie 2.

Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnić wzór

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin x + \sin nx - \sin(1+n)x}{2(1 - \cos x)}$$

Przestrzenie liniowe, podprzestrzenie

Zadanie 3.

Przykłady przestrzeni liniowych.

- (a) Załóżmy, że ciało K jest podciałem ciała L , czyli mamy $K \subseteq L$; pokaż, że L jest przestrzenią liniową nad K .
- (b) Rozpatrzmy dowolny zbiór X . Dla podzbiorów $A, B \subseteq X$ definiujemy $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Pokaż, że na zbiorze podzbiorów X , czyli 2^X , istnieje struktura $\mathbb{Z}_2$ przestrzeni wektorowej, w której jest to operacja dodawania wektorów.

Zadanie 4.

Rozpatrzmy $\mathbb{R}$ -liniową przestrzeń ciągów liczb rzeczywistych $\{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}\}$ z działaniami definiowanymi “po wartościach”. Który z następujących zbiorów jest podprzestrzenią tej przestrzeni? Odpowiedź uzasadnij.

- (a) $\{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} : \exists_{i_0} \forall_{i \geq i_0} a_i = 0\}$,
- (b) $\{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} : \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0\}$,
- (c) $\{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} : \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a\}$ dla ustalonego $a \in \mathbb{R}$,
- (d) $\{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} : \lim_{i \rightarrow \infty} a_i \text{ istnieje}\}$.

Zadanie 5.

Rozpatrzmy $\mathbb{R}$ -liniową przestrzeń funkcji określonych na $\mathbb{R}$ o wartościach w $\mathbb{R}$, z działaniami definiowanymi “po wartościach”. Który z następujących zbiorów jest podprzestrzenią tej przestrzeni? Odpowiedź uzasadnij.

- (a) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \exists_{a \in \mathbb{R}} \forall_{x: |x| > a} f(x) = 0\}$,
- (b) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \exists_{a \in \mathbb{R}} \forall_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < ax^2\}$,
- (c) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \exists_{a \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \mathbb{R}} f(x+a) = f(x)\}$,
- (d) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(a) = 0\}$ dla ustalonego $a \in \mathbb{R}$.

Kombinacje liniowe, podprzestrzenie rozpięte przez zbiór wektorów

Zadanie 6.

Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie najmniejszą podprzestrzenią liniową zawierającą wektory $(1, 3, 2), (1, 2, 1), (2, 5, 3)$.

- (a) Czy wektor $(1, 1, 1)$ należy do V ? A wektor $(1, 4, 3)$?
- (b) Wykaż, że każdy wektor $(x_1, x_2, x_3) \in V$ spełnia $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

Zadanie 7.

Dla danego układu równań liniowych o współczynnikach w $\mathbb{Q}$ znajdź skończony układ rozwiązań taki, że każde rozwiązanie jest ich kombinacją liniową nad $\mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Zadanie 8.

Niech U i V będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej X . Wykaż, że:

- (a) $X \setminus U$ nie jest podprzestrzenią X .
- (b) $(X \setminus U) \cup \{0\}$ jest podprzestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy $U = 0$ lub $U = X$.
- (c) jeśli $X = U \cup V$, to $U = X$ lub $V = X$.

Zadanie 9.

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem p -elementowym oraz niech $W_1, W_2, W_3 \subset V$ będą właściwymi podprzestrzeniami liniowymi.

- (a) Załóżmy, że $2 < p < \infty$ oraz $|V| < \infty$. Udowodnić, że $|W_1 \cup W_2 \cup W_3| < |V|$.
- (b) Wskazać przykład trzech właściwych podprzestrzeni liniowych $W_1, W_2, W_3 \subset V$ nad $\mathbb{Z}_2$ takich, że

$$W_1 \cup W_2 \cup W_3 = V.$$

Zadanie 10.

Niech U, V, W będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej X .

- (a) Wykaż, że $U + V = \{u + v : u \in U, v \in V\}$ jest najmniejszą podprzestrzenią zawierającą U i V .
- (b) Sprawdź, czy zawsze $U \cap W + V \cap W = (U + V) \cap W$.
- (c) Sprawdź, czy zawsze $(U + W) \cap (V + W) = U \cap V + W$.

GAL1, zima 2024/2025
Zadania na piąty tydzień (04.11-09.11)

Zadanie 1.

ZADANIA PRZEDWSTĘPNE Czy poniższe układy wektorów rozpinają całą przestrzeń? Czy są liniowo niezależne?

- a) $(3, 1, 1), (1, 0, 2), (0, 3, 2)$ w $\mathbb{R}^3$;
b) $(3, 1, 0, -2), (5, 2, 2, -1), (1, -1, 0, -2), (5, 1, 1, -3), (-7, -3, 1, 5), (4, 1, -2, -5)$ w $\mathbb{R}^4$;
c) $(1, 2, 4, 8), (1, -1, 1, -1), (1, 1, 1, 1), (1, i, -1, -i)$ w przestrzeni $\mathbb{C}^4$ nad ciałem $\mathbb{C}$.

Zadanie 2.

Dla jakich par $(s, t) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ wektory $v_1 = (5, 7, s, 2), v_2 = (1, 3, 2, 1), v_3 = (2, 2, 4, t)$ są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathbb{Q}^4$ nad $\mathbb{Q}$?

Zadanie 3.

Niech $V \subset \mathbb{R}[x]$ będzie podprzestrzenią liniową składającą się z wielomianów stopnia ≤ 10 oraz spełniających

$$f(1) = f(2) = 0.$$

Znaleźć możliwie najmniejszy układ wektorów (tzn wielomianów) rozpinający V .

Zadanie 4.

Niech V będzie przestrzenią liniową, $\beta \in V$ oraz $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ będzie układem liniowo niezależnym. Wykazać że $\beta \in \text{lin}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta$ jest liniowo zależny.

Zadanie 5.

Które z podanych zbiorów są liniowo niezależne?

- (a) dowolne niezerowe wielomiany $\{f_1, \dots, f_n\}$ spełniające warunek $\deg f_i \neq \deg f_j$ dla $i \neq j$ w przestrzeni $K[x]$ nad ciałem K
(b) Zbiór funkcji $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ indeksowanych za pomocą $a \in A$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$ jest dowolne, w przestrzeni funkcji $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; funkcje f_a są zdefiniowane następująco: $f_a(x) = 0$ dla $x < a$ i $f_a(x) = x - a$ dla $x \geq a$.

Zadanie 6.

Które z podanych zbiorów są liniowo niezależne?

- (a) zbiór funkcji $\{\sin(nx) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
(b) zbiór funkcji $\{\cos(nx) + i \sin(nx) \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$

Zadanie 7.

Rozważamy zbiór liczb rzeczywistych jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{Q}$. Udowodnić, że układ $\{1, \sqrt[3]{7}, (\sqrt[3]{7})^2\}$ jest liniowo niezależny.

Zadanie 8.

Sprawdź, że wektory $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ są liniowo niezależne. Dla dowolnego $n \geq 1$ zaproponuj n -elementowy zbiór liczb rzeczywistych liniowo niezależnych nad $\mathbb{Q}$. Czy istnieje nieskończony i liniowo niezależny nad $\mathbb{Q}$ podzbiór $\mathbb{R}$? Czy istnieje skończony układ rozpinający $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$?

Zadanie 9.

Niech L będzie ciałem, a $K \subset L$ podciałem. Udowodnić, że wektory $v_1, v_2, \dots, v_k \in K^n$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy te same wektory rozpatrywane jako wektory L^n są liniowo niezależne.

Zadanie 10.

Niech $K = \mathbb{Z}_2(a)$ będzie ciałem 4-elementowym (skonstruowanym na jednym z poprzednich ćwiczeń), $K = \{0, 1, a, a + 1\}$, $a^2 = a + 1$. Niech

$$V = \{f \in K[x] \mid \forall u \in K \ f(u) = 0, \ \deg(f) \leq 10\}.$$

Znaleźć układ liniowo niezależny rozpinający V , tzn bazę V .

GAL1, zima 2024/2025
Zadania na szósty tydzień (12.11–17.11)

Zadanie 1.

Dla jakich t układ wektorów $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (1, t, -3)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{C}^3$? Dla każdego takiego t wyznacz współrzędne wektora $v = (1, 2, i) \in \mathbb{C}^3$ w tej bazie.

Zadanie 2.

- (a) Niech V będzie przestrzenią liniową, która ma bazę złożoną z n wektorów. Wykaż, że w V istnieje układ $n + 1$ wektorów $v_1, \dots, v_{n+1}$ liniowo zależnych, takich, że każde n wektorów z tego układu tworzy układ liniowo niezależny.
- (b) Wykaż, że istnieje nieskończony podzbiór wektorów $\mathbb{R}$ -przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$, taki że każde n wektorów w tym podzbiorze tworzy układ liniowo niezależny.

Zadanie 3.

Niech K będzie ciałem. Pokaż, że jednomiany $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ stanowią bazę $K[x_1, \dots, x_n]$ jako przestrzeni liniowej nad K . Znajdź bazę jednomianową podprzestrzeni wielomianów jednorodnych stopnia d i podaj wzór na liczbę elementów w tej bazie; sprawdź, że liczba ta jest współczynnikiem przy t^d w zapisie funkcji wymiernej $(1 - t)^{-n}$ jako szeregu formalnego w $\mathbb{Q}[[t]]$.

Zadanie 4.

Podaj bazę $\mathcal{B}$ podprzestrzeni funkcji wielomianowych $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających następujące warunki:

- (a) $f(1) = f(-1) = 0$ i dodatkowo załóżmy $x^4 - x^2 \in \mathcal{B}$
- (b) $f(x) = -f(-x)$ i dodatkowo załóżmy $x^3 + x \in \mathcal{B}$
- (c) $f''(1) = 0$, gdzie f'' oznacza drugą pochodną, i dodatkowo $x + 1 \in \mathcal{B}$.

Zadanie 5.

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ będzie bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem K . Rozpatrzmy podprzestrzeń $W \subseteq V$ wymiaru $d > 0$. Pokaż, że dla ciągu dowolnych indeksów $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ długości $r > n - d$, istnieje nietrywialny ciąg skalarów $a_{i_1}, \dots, a_{i_r} \in K$ taki, że

$$a_{i_1}\alpha_{i_1} + \cdots + a_{i_r}\alpha_{i_r} \in W \setminus \{0\}$$

Zadanie 6.

- a) Niech $\alpha_1 = (1, 3, 1)$, $\alpha_2 = (2, 2, 1)$, $\alpha = (-3, 0, 1)$. Znaleźć (jeśli istnieje) taki wektor α_3 , że układ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jest bazą $\mathbb{R}^3$ i wektor α ma w tej bazie współrzędne 2, -3, 1.
- b) To samo polecenie gdy $\beta = (3, 5, 2)$.
- c) Niech V będzie n -wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $v_1, \dots, v_{n-1} \in V$ będzie układem liniowo niezależnym. Niech $a_1, \dots, a_n \in K$ i niech $w \in V$. Znajdź warunki konieczne i dostateczne na to, by istniał wektor v_n taki, by $v_1, \dots, v_n$ był bazą V i $a_1, \dots, a_n$ był ciągiem współrzędnych wektora w w tej bazie. Zbadaj jednoznaczność rozwiązania.

Zadanie 7.

Niech $U = \text{lin}((1, 3, 2, 5), (3, 5, 1, 7), (1, 3, s, 8)) \in \mathbb{R}^4$, zaś $V \subseteq \mathbb{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań liniowych

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + tx_4 = 0 \end{cases}$$

Wyznacz wymiary przestrzeni U oraz V w zależności od parametrów s i t . Dla jakich par $(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zachodzi $U + V = \mathbb{R}^4$?

Zadanie 8.

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i $\mathcal{A} = \{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ jej bazą. Dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ niech $V_n = \text{lin}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset V$.

- (a) Wykaż, że dla każdej skończonej wymiarowej podprzestrzeni $W \subset V$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ dla którego $W \subset V_n$.
- (b) Podaj przykład takiej podprzestrzeni $W \subset V$, że $W \neq V$ i dla każdego wektora $\alpha \in V \setminus W$ zachodzi $\{a\alpha + \beta : a \in K, \beta \in W\} = V$.

Zadanie 9.

a) Pokaż, że przestrzeń wektorowa V nad ciałem $\mathbb{Z}_p$ wymiaru n ma p^n elementów. Na ile sposobów można wybrać uporządkowaną bazę takiej przestrzeni? Ile jest różnych podprzestrzeni liniowych wymiaru d , gdzie $1 \leq d \leq n$, w przestrzeni V ?

b) Niech $d, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq d \leq n$. Udowodnić, że wyrażenie

$$\frac{(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{d-1})}{(p^d - 1)(p^d - p)(p^d - p^2) \dots (p^d - p^{d-1})}$$

jest wielomianem zmiennej p .

Zadanie 10.

Żałómy, że K jest ciałem zawierającym $\mathbb{C}$. Udowodnij, że gdy wymiar K jako przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbb{C}$ jest skończony, to $K = \mathbb{C}$.

GAL1, zima 2024/2025
Zadania na siódmy tydzień (18.11–24.11)

Zadanie 1.

Opisać równaniami najmniejszą podprzestrzeń liniową zawierającą wektory

- (a) $(1, -1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1)$ w $\mathbb{R}^4$
(b) $(1, -1, 1, -1, 1), (1, 1, 0, 0, 3), (3, 1, 1, -1, 7), (0, 2, -1, 1, 2)$ w $\mathbb{R}^5$.

Zadanie 2.

Dane są wektory w $\mathbb{R}^3$: $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3)$, $\beta_1 = (1, -1, 1)$, $\beta_2 = (4, 1, 2)$. Opisać równaniami $\text{lin}(\alpha_1, \alpha_2) \cap \text{lin}(\beta_1, \beta_2)$.

Zadanie 3.

Dla ustalonego zbioru X rozpatrzmy $\mathbb{Z}_2$ -przestrzeń liniową 2^X zdefiniowaną w serii zadań na 4. tydzień (Zad. 3b). Niech $[n] = \{1, \dots, n\}$. Znajdź bazę i wymiar przestrzeni $2^{[n]}$. Czy $2^{\mathbb{N}}$ ma przeliczalną bazę?

Zadanie 4.

- (a) Niech zbiór B będzie bazą przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{C}$. Wykaż, że zbiór $B \cup iB$ jest bazą V jako przestrzeni liniowej nad $\mathbb{R}$. W szczególności otrzymujemy $\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$.
(b) Załóżmy, że K jest podciałem ciała L , a V jest przestrzenią liniową nad L . Wykaż, że gdy zbiór A jest bazą L jako przestrzeni liniowej nad K , a zbiór B jest bazą V nad L , to zbiór $\{\alpha v : (\alpha, v) \in A \times B\}$ jest bazą V nad K .

Zadanie 5.

Podprzestrzenie V_1 i V_2 w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ o współrzędnych (x, y, z, w) zadane są przez układy równań

$$V_1 : \begin{cases} x + 2y - 3w = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}, \quad V_2 : \begin{cases} 3x + y - z - 3w = 0 \\ x + y - z - w = 0 \end{cases}$$

Znajdź wymiary przestrzeni V_1 , V_2 , $V_1 \cap V_2$, $V_1 + V_2$. Podaj bazę $V_1 + V_2$, która zawiera jako podzbiory bazy $V_1 \cap V_2$, V_1 i V_2 .

Zadanie 6.

Dana jest przestrzeń liniowa V wymiaru n nad ciałem $K \neq \mathbb{Z}_2$ oraz jej podprzestrzenie W_1, W_2 , przy czym $0 < \dim W_1, \dim W_2 < n$. Wykaż, że istnieje element $\alpha \in V$, taki że $\alpha \notin W_1$ oraz $\alpha \notin W_2$. Wykaż dalej, że istnieje baza przestrzeni V , taka że żaden z jej elementów nie jest zawarty ani w W_1 , ani w W_2 . Czy jest to prawda jeśli $K = \mathbb{Z}_2$?

Zadanie 7.

W przestrzeni $\mathbb{Q}^4$ rozpatrzmy przestrzeń $V_{s,t} = \text{lin}((1, 2, 3, 1), (1, 3, 2, 1), (2, 3, s, t))$ zależną od parametrów $s, t \in \mathbb{Q}$. Znajdź wymiar przestrzeni $V_{s,t}$ w zależności od wartości parametrów. Rozstrzygnij dla jakich $s, t \in \mathbb{Q}$ istnieją podprzestrzenie $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{Q}^4$ takie, że

$$\mathbb{Q}^4 = W_1 \oplus V_{s,t} = W_1 \oplus W_2 = V_{s,t} \oplus W_2$$

i dla takich s, t , dla których jest to możliwe, podaj podprzestrzenie W_1, W_2 .

Zadanie 8.

Załóżmy, że $\text{char } K \neq 2$. Dla $n \geq 2$ definiujemy dwie podprzestrzenie macierzy $n \times n$ nad ciałem K :

$$M_n^{sym} = \{A \in M_{n \times n}(K) : A = A^T\}, \quad M_n^{asym} = \{A \in M_{n \times n}(K) : A = -A^T\}$$

Pokaż, że $M_{n \times n}(K) = M_n^{sym} \oplus M_n^{asym}$.

Przypominamy, że transpozycja macierzy jest zdefiniowana następująco: $[a_{ij}]^T = [a_{ji}]$.

Zadanie 9.

Założmy, że V jest przestrzenią skończonego wymiaru nad ciałem K oraz w przestrzeni V mamy dane trzy właściwe podprzestrzenie $V_1, V_2, W \subsetneq V$. Czy jeśli $V_1 \oplus V_2 = V$, to $(V_1 \cap W) \oplus (V_2 \cap W) = W$? Czy jeśli $(V_1 \cap W) \oplus (V_2 \cap W) = W$ i $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$, to $V_1 \oplus V_2 = V$? Czy jeśli $(V_1 \cap W) \oplus (V_2 \cap W) = W$, $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$ i $\dim W = \dim V - 1$, to $V_1 \oplus V_2 = V$?

Zadanie 10.

W przestrzeni $\mathbb{R}^n$, dla ustalonego d , $1 \leq d \leq n - 1$, rozpatrzmy skończony (wersja łatwiejsza) lub przeliczalny (wersja trudniejsza) ciąg podprzestrzeni $V_i : i = 1, 2, \dots$, każda z nich wymiaru d . Pokaż, że istnieje podprzestrzeń $U \subset \mathbb{R}^n$ wymiaru $n - 1$, taka, że dla każdego $i = 1, 2, \dots$ zachodzi $\dim(V_i \cap U) = d - 1$. Pokaż, że istnieje podprzestrzeń $W \subset \mathbb{R}^n$ wymiaru $n - d$, taka, że dla każdego $i = 1, 2, \dots$ zachodzi $W \oplus V_i = \mathbb{R}^n$.

GAL1, zima 2024/2025
Zadania na ósmy tydzień (25.11-29.11)

Na początku rozwiążemy zadania z dawniego kolokwium. Poniżej oryginalny tekst:

GAL Kolokwium 1, 21 listopada 2016, Temat A

Instrukcje:

- Każdą odpowiedź **TRZEBA** starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania **TRZEBA** napisać na **ODDZIELNEJ** kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę **CZYTELNIE** podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1 [18pt]

Niech V będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^5$ opisaną układem równań:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0,$$

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 + ax_5 = 0.$$

- (a) Wyznaczyć wymiar V w zależności od wartości parametru a .
- (b) Dla $a = 0$ znaleźć bazę V_0 zawierającą wektor $(1, 1, 1, -2, 0)$.

Zadanie 2 [18pt]

Dane wektory $\alpha = (5, 5, 2, 3)$, $\beta = (7, 7, 2, 0)$, $\gamma = (2, 2, 0, 8) \in \mathbb{R}^4$.

- (a) Opisać przestrzeń rozpiętą przez wektory α i β układem równań.
- (b) Znaleźć przykład przestrzeni $V \subset \mathbb{R}^4$ takiej, że $\dim V = 3$ oraz $\alpha \in V$, $\beta \in V$, ale $\gamma \notin V$. Opisać V równaniem.
- (c) Traktujemy wektory α, β, γ jako wektory z $(\mathbb{Z}_{11})^4$. Czy istnieje przestrzeń $V \subset (\mathbb{Z}_{11})^4$ taka, że $\dim V = 3$ oraz $\alpha \in V$, $\beta \in V$, ale $\gamma \notin V$?

Zadanie 3 [18pt]

Niech K będzie ciałem oraz $V \subset K^n$ będzie podprzestrzenią liniową opisaną układem równań liniowych

$$\mathcal{U} = \{f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 : k = 1, 2, \dots, m\},$$

gdzie $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \dots + a_{k,n}x_n$. Dana jest podprzestrzeń $W \subset K^n$ zawierająca V .

- (a) Czy W można opisać podukładem układu $\mathcal{U}$?
- (b) Załóżmy, że $W \neq K^n$. Udowodnić, że istnieją współczynniki $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in K$, nie wszystkie równe zero, takie, że funkcja

$$g = \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k$$

zeruje się na W .

Dalej są zwykłe zadania na ćwiczenia:

Zadanie 4.

Rozważ rodzinę macierzy A_k o wymiarach $n \times n$, zdefiniowaną w następujący sposób:

$$A_k = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & k & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & k & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & k \end{bmatrix},$$

gdzie $k \in \mathbb{R}$ jest parametrem.

- (a) Znajdź wszystkie wartości k , dla których $\text{r}(A_k) < n$, i oblicz rząd macierzy dla tych przypadków.
- (b) Dla dowolnego $k \neq 1$, znajdź bazę przestrzeni rozwiązań układu jednorodnego zadanego przez macierz A_k .

Zadanie 5.

Nad ciałem $\mathbb{Z}_{17}$ dany jest układ równań liniowych, którego macierz rozszerzona wygląda tak

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ s & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & t \end{array} \right]$$

W zależności od $s, t \in \mathbb{Z}_{17}$ orzec ile jest rozwiązań. Nie rozwiązywać tego układu.

Zadanie 6.

Niech $v_1 = (4, 1, 3)$, $v_2 = (2, 1, 1)$, $w_1 = (1, 3, 4)$, $w_2 = (2, 5, 9)$ będą wektorami przestrzeni K^3 . Wskazać bazę $\text{lin}(v_1, v_2) \cap \text{lin}(w_1, w_2)$. Odpowiedź uzależnij od charakterystyki ciała.

Zadanie 7.

ZADANIE NA PĘK PŁASZCZYZN. Niech

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y - z = 0\}, \quad Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5x - 2y + 3z = 0\}.$$

Znaleźć równanie płaszczyzny S zawierającej $P \cap Q$ oraz wektor $(1, 3, 2)$.

Zadanie 8.

Niech X będzie przestrzenią liniową, a $\text{Lat}_0(X)$ rodziną wszystkich skończenie wymiarowych podprzestrzeni X . Zdefiniujmy funkcję $\rho: \text{Lat}_0(X) \times \text{Lat}_0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\rho(U, V) = \dim(U + V) - \dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - 2 \dim(U \cap V).$$

Wykaż, że dla dowolnych $U, V, W \in \text{Lat}_0(X)$ zachodzi:

- (a) $\rho(U, V) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U = V$,
- (b) $\rho(U, V) = \rho(V, U)$,
- (c) $\rho(U, W) \leq \rho(U, V) + \rho(V, W)$.

Zadanie 9.

Załóżmy, że U, V są skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami pewnej przestrzeni liniowej. Wykaż, że

- (a) jeśli $\dim U \leq \dim V$ oraz $\dim(U + V) = \dim(U \cap V) + 1$, to $U \subseteq V$.
- (b) jeśli $\dim U < \dim V$ oraz $\dim(U + V) = \dim(U \cap V) + 2$, to $U \subseteq V$.

Zadanie 10.

SUMA PROSTA – DEFINICJA ZEWNĘTRZNA Rozpatrzmy ciąg przestrzeni liniowych $V_1, V_2, \dots, V_n$ nad ciałem K . Na produkcie kartezjańskim $V_1 \times \dots \times V_r$ definiujemy strukturę przestrzeni liniowej “po współrzędnych”, czyli

$$\begin{aligned}(v_1, \dots, v_r) + (v'_1, \dots, v'_r) &= (v_1 + v'_1, \dots, v_r + v'_r) \\ a \cdot (v_1, \dots, v_r) &= (a \cdot v_1, \dots, a \cdot v_r)\end{aligned}$$

Pokaż, że tak zdefiniowane dodawanie wektorów i mnożenie przez skalary definiuje przestrzeń liniową; będziemy ją oznaczać $V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ i nazywać *zewnątrzną sumą prostą* przestrzeni $V_1, \dots, V_r$. Dla każdego $i = 1, \dots, r$ zdefiniujmy podprzestrzeń (proszę sprawdzić, że jest to podprzestrzeń) $\tilde{V}_i \subseteq V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ w sposób następujący

$$\tilde{V}_i = \{(0, \dots, 0, \underset{i}{v}, 0, \dots, 0) : v \in V_i\}$$

Pokaż, że suma prosta zewnętrzną $V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ jest jednocześnie sumą wewnętrzną swoich podprzestrzeni $\tilde{V}_i$, $i = 1, \dots, r$.

GAL1, zima 2024/2025
Zadania na dziewiąty tydzień (02.12-06.12)

Przekształcenia liniowe, jądro

Zadanie 1.

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K . Funkcję $\varphi : V \rightarrow W$ nazywamy przekształceniem liniowym jeśli

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall v_1, \dots, v_n \in V \forall a_1, \dots, a_n \in K \quad \varphi(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 \varphi(v_1) + \dots + a_n \varphi(v_n)$$

Sprawdź, czy następujące funkcje są przekształceniami liniowymi:

- (a) $\varphi : 2^{[n]} \rightarrow \mathbb{Z}_2$, $\varphi(A) = |A| \bmod 2$, gdzie $2^{[n]}$ jest $\mathbb{Z}_2$ -przestrzenią liniową podzbiorów $[n] = \{1, \dots, n\}$ oraz $A \subseteq [n]$.
- (b) $\varphi : F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(f) = (f(a_1), \dots, f(a_n))$, gdzie $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ oznacza przestrzeń funkcji rzeczywistych oraz $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.
- (c) $\varphi : F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\varphi(f)(x) = f(x+1)$.

Zadanie 2.

Załóżmy, że przekształcenie liniowe $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ zadane jest wzorem

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Pokaż, że każda z funkcji f_i jest postaci $f_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$, gdzie $a_{ij} \in K$.

Zadanie 3.

Znajdź przekształcenia liniowe spełniające następujące warunki, podaj wzór postaci

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(z_1, \dots, x_n))$$

gdzie f_i są pewnymi funkcjami; rozstrzygnij czy funkcje f_i są wyznaczone jednoznacznie.

- (a) przekształcenie $\varphi : \mathbb{Q}^4 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ przyjmujące następujące wartości $\varphi(1, 1, 0, 0) = (1, 0)$, $\varphi(0, 1, 1, 0) = (0, 1)$, $\varphi(0, 0, 1, 1) = (1, -1)$
- (b) przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takie, że $\varphi(\varphi(x_1, x_2)) = (-x_1, -x_2)$
- (c) przekształcenie $\varphi : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ takie, że $(1, 0, 2) \notin \text{im}(\varphi) = \varphi(\mathbb{Q}^3)$ oraz $\varphi(1, 1, 2) = 0$

Zadanie 4.

Załóżmy, że mamy dane podprzestrzenie liniowe $V_1, V_2 \subseteq V$ przestrzeni nad ustalonym ciałem K oraz przekształcenia liniowe $\varphi_1 : V_1 \rightarrow W$, $\varphi_2 : V_2 \rightarrow W$ do pewnej przestrzeni liniowej W . Czy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : V \rightarrow W$ takie, że $\varphi|_{V_1} = \varphi_1$ i $\varphi|_{V_2} = \varphi_2$ jeśli

- (a) $V_1 + V_2 = V$
- (b) $V_1 \oplus V_2 = V$
- (c) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

Jeśli przekształcenie φ istnieje, to rozstrzygnij czy jest zdefiniowane jednoznacznie.

Zadanie 5.

Niech $V \subset K^n$ będzie przestrzenią rozwiązań jednorodnego układu równań, którego macierz jest równa $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$. Znajdź odwzorowanie liniowe $\varphi : K^n \rightarrow K^r$, którego jądrem jest V . Czy odwzorowanie φ jest wyznaczone jednoznacznie? Podaj warunek na r .

Zadanie 6.

Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $f, g: V \rightarrow W$ będą przekształceniami spełniającymi warunek: dla każdego wektora $v \in V$ istnieje skalar $c_v \in K$ taki, że $g(v) = c_v f(v)$. Wykaż, że istnieje $c \in K$, dla którego $g = cf$.

Zadanie 7.

Niech K będzie ciałem charakterystyki $p > 0$. Definiujemy funkcję $\phi: K \rightarrow K$ wzorem $\phi(a) = a^p$. Pokaż, że funkcja ϕ jest identycznością na $\mathbb{Z}_p \subseteq K$. Pokaż, że $\phi: K \rightarrow K$ jest przekształceniem $\mathbb{Z}_p$ -liniowym. Opisz ϕ dla ciała o 4 i o 9 elementach. [ϕ nazywamy przekształceniem Frobeniusa]

Zadanie 8.

Niech K będzie ciałem charakterystyki 0. Definiujemy $\rho: K[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K[x_1, \dots, x_n]$ wzorem

$$\rho(f(x_1, \dots, x_n)) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

gdzie sumą jest brana po wszystkich permutacjach zbioru $\{1, \dots, n\}$. Pokaż, że ρ jest przekształceniem K -liniowym. Pokaż, że jeśli $f = f_{d_1} + \dots + f_{d_r}$ jest rozkładem na wielomiany jednorodne, to $\rho(f) = \rho(f_{d_1}) + \dots + \rho(f_{d_r})$. Pokaż, że obrazem ρ jest podprzestrzeń wielomianów symetrycznych oraz jeśli f jest symetryczny, to $\rho(f) = f$. [ρ nazywamy operatorem Reynoldsa]

Zadanie 9.

Ile jest przekształceń liniowych z $\mathbb{Z}_p^n$ w $\mathbb{Z}_p^m$? Jeśli założymy $n \leq m$, to ile jest przekształceń, które są monomorfizmami, czyli mają trywialne jądro?

Zadanie 10.

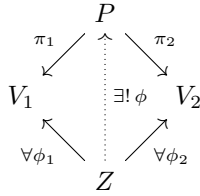
Niech V będzie przestrzenią liniową nad K , a $f: V \rightarrow K$ niezerową funkcją liniową. Niech $U \subset V$ będzie jądrem f . Wykaż, że $V = U \oplus \text{lin}(v)$ dla dowolnego $v \in V \setminus U$.

GAL1, zima 2024/2025

Zadania na dziesiąty tydzień (09.12-13.12)

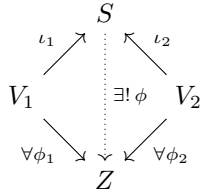
Rozważamy dowolną kategorię $\mathcal{C}$, ale proszę myśleć, że mamy do czynienia ze zbiorami i funkcjami lub przestrzeniami liniowymi i przekształceniami liniowymi. Przekształcenia/funkcje liniowe pomiędzy obiektami A, B oznaczamy przez $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ i nazywamy morfizmami. Dla dowolnego obiektu A istnieje wyróżniony morfizm identycznościowy $id_A: A \rightarrow A$.

Kategoryjna definicja produktu: mówimy, że P wraz z przekształceniami $\pi_1: P \rightarrow V_1, \pi_2: P \rightarrow V_2$ jest produktem V_1 i V_2 , gdy spełniony jest następujący warunek: *dla dowolnego obiektu Z oraz morfizmów $\phi_i: Z \rightarrow V_i, \phi_j: Z \rightarrow V_j$ istnieje dokładnie jeden morfizm $\phi: Z \rightarrow P$, taki że $\phi_i = \pi_i \phi$ dla $i = 1, 2$.* Powyższe zdanie wyrażamy diagramem, który ma być *przebiegiem*, czyli przejście po dwóch ścieżkach łączących parę obiektów (złożenie morfizmów odpowiadających krawędziom ścieżek) ma dawać ten sam efekt:



Piszemy $P \simeq V_1 \times V_2$.

Definicja (zewnątrznej) sumy prostej (koproduktu) jest „dualna” (mechanicznie zamieniamy kierunki morfizmów):



Obiekt początkowy X to taki obiekt w kategorii $\mathcal{C}$, że dla każdego obiektu A zbiór morfizmów $Mor_{\mathcal{C}}(X, A)$ jest jednoelementowy.

Obiekt końcowy K to taki obiekt w kategorii $\mathcal{C}$, że dla każdego obiektu A zbiór morfizmów $Mor_{\mathcal{C}}(A, K)$ jest jednoelementowy.

Morfizm zerowy. Załóżmy, że obiekt początkowy jest jednocześnie obiektem końcowym. Oznaczmy go przez $\mathbf{0}$. Mówimy, że $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ jest zerowym morfizmem, jeśli f można przedstawić jako złożenie $A \rightarrow \mathbf{0} \rightarrow B$.

Izomorfizm. Powiemy, że obiekty X, Y w kategorii $\mathcal{C}$ są izomorficzne jeśli istnieją morfizmy $f: X \rightarrow Y$ oraz $g: Y \rightarrow X$ takie, że $gf = id_X$ oraz $fg = id_Y$.

Zadanie 11.

Udowodnić:

- Jeśli w kategorii mamy dwa obiekty początkowe, to są one izomorficzne.
- Jeśli w kategorii mamy dwa obiekty końcowe, to są one izomorficzne.
- Jeśli obiekt początkowy jest końcowym, to pomiędzy dowolnymi dwoma obiektami istnieje dokładnie jeden morfizm zerowy.

Zadanie 12.

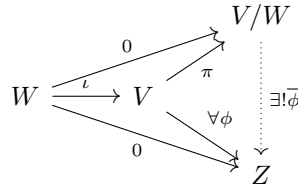
Czym są produkty, koprodukty, obiekty początkowe i końcowe w kategorii zbiorów i w kategorii przestrzeni liniowych?

Zadanie 13.

Niech $W \subset V$. Wyznaczyć wszystkie warstwy W w V , czyli elementy przestrzeni ilorazowej V/W , dla $V = \mathbb{Z}_2^3$, $W = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$.

Zadanie 14.

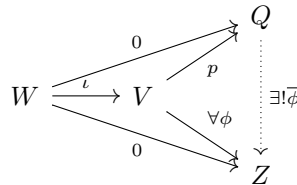
Własność uniwersalna ilorazu. Niech $\iota : W \rightarrow V$ oznacza inkluzję przestrzeni liniowych. Udowodnić, że dla każdego przekształcenia liniowego $\phi : V \rightarrow Z$ takiego, że $\phi \circ \iota = 0$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie $\bar{\phi}$ takie, że $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$:



Innymi słowy, wszystkie przekształcenia z V zerujące się na W jednoznacznie faktoryzują się przez V/W .

Zadanie 15.

Własność uniwersalna determinuje iloraz z dokładnością do izomorfizmu. Jeśli odwzorowanie $p : V \rightarrow Q$ spełnia warunek: $p \circ \iota = 0$ oraz dla każdego przekształcenia liniowego $\phi : V \rightarrow Z$ takiego, że $\phi|_W = 0$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie $\bar{\phi}$ takie, że $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$:



to $Q \simeq V/W$ oraz ten izomorfizm jest zgodny z przekształceniami $p : V \rightarrow Q$ i $\pi : V \rightarrow V/W$.

Zadanie 16.

Niech $\phi : V \rightarrow Z$ będzie przekształceniem liniowym. Wskazać przekształcenie

$$\bar{\phi} : V/\ker(\phi) \rightarrow Z$$

takie, że $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$. i dowieść, że $\bar{\phi}$ zadaje izomorfizm $V/\ker(\phi) \simeq \text{im}(\phi)$.

Zadanie 17.

Niech $U, W \subset V$ będą przestrzeniami liniowymi.

(a) Posługując się definicją kategorię wskazać przekształcenia

$$U/(U \cap W) \longrightarrow (U + W)/W.$$

(b) Załóżmy, że $U \subset W$. Wskazać przekształcenie

$$V/W \longrightarrow (V/U)/(W/U).$$

(c) Wykazać, że powyższe przekształcenia są izomorfizmami.

Zadanie 18.

Niech P będzie przestrzenią funkcji wielomianowych z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Określamy $W = \{p \in P : p(0) = p(1)\}$ oraz $V = \{p \in P : p(0) = p(1) = 0\}$. Pokazać, że $P/W \simeq \mathbb{R}$ oraz $P/V \simeq \mathbb{R}^2$.

Zadanie 19.

Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem domkniętym oraz niech $C(A)$ oznacza zbiór funkcji ciągłych na A . Wtedy $C(A) \simeq C(\mathbb{R})/I(A)$, gdzie $I(A) = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \forall x \in A, f(x) = 0\}$.

Zadanie 20.

Niech $f_i : V_i \rightarrow V_{i+1}$ dla $i = 0, \dots, n$ będzie ciągiem przekształceń liniowych skończonego wymiaru, takim że $\text{im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$, $V_0 = 0$ i $V_{n+1} = 0$. Udowodnij, że $\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim V_i = 0$.

GAL1, zima 2024/2025
Zadania na jedenasty tydzień (16.12-20.12)

Iloraz przestrzeni liniowych, macierze przekształceń liniowych

Zadanie 1.

Mamy dane następujące uporządkowane bazy przestrzeni $\mathbb{Q}^3$ i $\mathbb{Q}^2$:

$$\mathcal{A} = \left((0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 2, 0) \right), \quad \mathcal{B} = \left((-1, 1), (-1, 2) \right)$$

Założmy, że przekształcenie $\varphi : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ zadane jest wzorem

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)$$

dla pewnych $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Podaj macierz $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Zadanie 2.

Podaj przykład przekształcenia liniowego $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spełniającego:

$$(1, 1, 2) \in \text{im}(f), \quad \ker(f) = \text{lin}(-1, 2, 1), \quad f^3 = 0.$$

Zadanie 3.

Założmy, że K jest ciałem oraz $n > 1$. Wykaż, że dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n \times n}(K)$ zachodzi:

(a) $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

(b) $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

(c) $r(A) + r(B) \leq r(AB) + n$.

Zadanie 4.

Twierdzenie Fermata o sumie dwóch kwadratów mówi, że liczba $p \in P$ jest sumą dwóch kwadratów (tzn. $p = n^2 + m^2$ dla pewnych $n, m \in \mathbb{N}$) wtedy i tylko wtedy, gdy $p \equiv 1 \pmod{4}$. Wykorzystując to twierdzenie wyznacz te liczby $p \in P$, dla których zbiór

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

z działaniami dziedziczonymi z $M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_p)$ jest ciałem.

Zadanie 5.

Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Czy istnieje przykład macierzy $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ taki, że:

(a) $A^m = I_n$, oraz $A^i \neq I_n$, dla $i = 1, \dots, m-1$,

(b) $A^m = 0$, oraz $A^i \neq 0$, dla $i = 1, \dots, m-1$.

Zadanie 6.

Niech $a \neq b \in K$ będą skalarami. Opisać wszystkie macierze $B \in M_{4 \times 4}(K)$, które są przemienne z A (tzn. spełniają $AB = BA$), gdzie

(a)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Zadanie 7.

Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oblicz A^n dla $n > 1$. Znajdź związek z liczbami Fibonacciego. Jakie tożsamości wynikają z równości $A^{n+m} = A^n A^m$ dla $n, m > 1$?

Zadanie 8.

Rozpatrzmy przestrzenie V, W nad ustalonym ciałem K , $\dim V = \dim W < \infty$. Pokaż, że dla ustalonego przekształcenia $\varphi : V \rightarrow W$ można dobrać bazę $\mathcal{A}$ przestrzeni V i bazę $\mathcal{B}$ przestrzeni W , że macierz przekształcenia w tych bazach ma postać blokową

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie I_r jest macierzą kwadratową $r \times r$ z jedynkami na przekątnej i zerami poza nią, a pozostałe macierze są zerowe. Pokazać, że jeśli $\dim \operatorname{im}(\varphi) = r$, to φ można przedstawić jako sumę r przekształceń liniowych φ_i takich, że $\dim \operatorname{im}(\varphi_i) = 1$.

Zadanie 9.

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową. Załóżmy, że przekształcenia $f, g : V \rightarrow V$ są przemienne (tzn. $f \circ g = g \circ f$) oraz że $f - g$ jest monomorfizmem. Dowiedź, że $\ker(f \circ g) = \ker f \oplus \ker g$.

Zadanie 10.

Znajdź przykłady przekształceń $f : V \rightarrow V$ dla odpowiednio wybranej przestrzeni liniowej V takie, że

(a) f jest monomorfizmem, ale nie jest epimorfizmem,

(b) f jest epimorfizmem, ale nie jest monomorfizmem.

GAL1, zima 2024/2025
Zadania na dwunasty tydzień (07.01.2025-10.01.2025)

Zadanie 1.

Dla $\sigma \in S_n$ definiujemy macierz $P(\sigma) \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$ następująco: $P(\sigma)_{i,j} = 1$ jeśli $\sigma(j) = i$ oraz $P(\sigma)_{i,j} = 0$ w pozostałych przypadkach. Niech $\sigma, \tau \in S_n$. Wykaż, że

- (a) $P(\sigma)P(\tau)$ jest macierzą permutacji.
- (b) dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $P(\sigma)^k = I_n$.
- (c) istnieje taki wektor v , że $P(\sigma) \cdot v = v$, oraz nie istnieje wektor v , dla którego $P(\sigma) \cdot v = cv$, gdzie $c \in \mathbb{C}$, $|c| \neq 1$.

Zadanie 2.

Niech A będzie odwracalną macierzą $n \times n$, a B odwracalną macierzą $m \times m$. Znając macierze A^{-1} i C^{-1} znaleźć macierz odwrotną do macierzy blokowej $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Zadanie 3.

Komutator macierzy kwadratowych (tego samego rozmiaru) definiujemy formułą $[X, Y] = XY - YX$. Udowodnić, następujące własności komutatora:

- (a) (antysymetria)

$$[X, Y] = -[Y, X],$$

- (b) (dwuliniowość)

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \quad \text{dla } a, b \in K,$$

- (c) (tożsamość Jacobiego)

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Przy założeniu (a) i (b) udowodnij, że własność (c) jest równoważna tożsamości Leibniza

$$D_X([Y, Z]) = [D_X(Y), Z] + [Y, D_X(Z)], \quad \text{gdzie } D_X(Y) = [X, Y].$$

Zadanie 4.

Żalóżmy, że ciało bazowe jest charakterystyki zero lub charakterystyki p oraz p nie dzieli n . Udowodnić, że macierz jednostkowa I_n nie jest komutatorem żadnych dwóch macierzy.

Zadanie 5.

Niech $B_n \subset M_{n \times n}(K)$ będzie zbiorem macierzy górnotrójkątnych.

- (a) Definiujemy

$$N_n^{(1)} = [B_n, B_n] = \text{lin}\{[X, Y] \in M_{n \times n}(K) \mid X, Y \in B_n\}.$$

Opisać zbiór $N_n^{(1)}$ równaniami zależnymi od wyrazów macierzy.

- (b) Indukcyjnie definiujemy

$$N_n^{(k+1)} = [N_n^{(1)}, N_n^{(k)}] = \text{lin}\{[X, Y] \in M_{n \times n}(K) \mid X \in N_n^{(1)}, Y \in N_n^{(k)}\}.$$

Opisać zbiór $N_n^{(k)}$ równaniami zależnymi od wyrazów macierzy.

- (c) Udowodnić, że $[N_n^{(\ell)}, N_n^{(k)}] = N_n^{(k+\ell)}$ oraz $N_n^{(n)} = 0$.

Przestrzenie odwzorowań

Dla dwóch przestrzeni liniowych U, W nad ciałem K przez $L(V, W)$ oznaczamy zbiór odwzorowań liniowych $L(V, W) = \{\varphi : V \rightarrow W\}$ ze strukturą przestrzeni liniowej nad K , w której operacje algebraiczne są zdefiniowane “po wartościach”. Przestrzeń $L(V, K)$ nazywamy przestrzenią sprzężoną (lub dualną) do V i oznaczamy V^* , a jej elementy nazywamy funkcjonalami na V . Więcej informacji znajdują Państwo w skrypcie dra Męcła: https://www.mimuw.edu.pl/~amecel/2019z/Gal_wyklad/12.gal_wyklad_11.pdf

Zadanie 6.

Niech $\theta : K^3 \rightarrow K^2$ będzie przekształceniem liniowym, które w bazach standardowych ma macierz $M(\theta)_{st_2}^{st_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$. Rozważmy przekształcenie liniowe $\theta^* : (K^2)^* \rightarrow (K^3)^*$

$$(K^2)^* \ni \lambda \mapsto \lambda \circ \theta \in (K^3)^*.$$

Znaleźć bazy jądra i obrazu tego przekształcenia.

Zadanie 7.

Załóżmy, że $\mathcal{A} = \{\alpha_i : i \in I\}$ to baza przestrzeni liniowej V a $\mathcal{B} = \{\beta_j : j \in J\}$ to baza przestrzeni liniowej W . Dla $(i, j) \in I \times J$ definiujemy $\varphi_{ij} : V \rightarrow W$ następującym wzorem

$$\varphi_{ij}(\alpha_k) = \begin{cases} \beta_j & \text{dla } k = i \\ 0 & \text{dla } k \neq i \end{cases}$$

- (a) Pokaż, układ $\mathcal{U} = \{\varphi_{ij}\}_{i \in I, j \in J}$ jest liniowo niezależny.
- (b) Pokaż, że jeśli V i W są skończonego wymiaru, to przekształcenia φ_{ij} stanowią bazę przestrzeni $L(V, W)$.
- (c) Pokaż, że jeśli $\psi \in L(V, W)$, $\dim(\text{im}(\psi)) < \infty$, to $\psi \in \text{lin } \mathcal{U}$.

Zadanie 8.

Rozpatrzmy przestrzeń liniową V nad K i jej podprzestrzeń liniową $W \subset V$. Pokaż, że dla dowolnego $u \notin W$ istnieje funkcjonal $\lambda \in V^* = L(V, K)$ taki, że $W \subseteq \ker \lambda$ i $\lambda(u) = 1$. Pokaż, że jeśli dodatkowo $V = W + \text{lin}(v)$, to funkcjonal λ jest wyznaczony jednoznacznie. Pokaż, że dla dwóch funkcjonałów $\lambda_1, \lambda_2 \in V^*$ zachodzi następująca równoważność: $\ker \lambda_1 = \ker \lambda_2 \iff \exists_{a \in K \setminus \{0\}} a\lambda_1 = \lambda_2$.

Zadanie 9.

Dla zbioru wektorów $X \subseteq V$ w przestrzeni liniowej V nad ciałem K definiujemy

$$\text{Ann}(X) = \{\lambda \in V^* : \forall_{v \in X} \lambda(v) = 0\} \subseteq V^*.$$

Podobnie dla zbioru funkcjonałów $X \subseteq V^*$ definiujemy

$$\text{Ann}(X) = \{v \in V : \forall_{\lambda \in X} \lambda(v) = 0\} \subseteq V.$$

- (a) Pokaż, że $\text{Ann}(X) = \text{Ann}(\text{lin}(X))$ i jeśli $X_1 \subseteq X_2$, to $\text{Ann}(X_1) \supseteq \text{Ann}(X_2)$.
- (b) Pokaż, że $\text{Ann}(X_1 \cup X_2) = \text{Ann}(X_1) \cap \text{Ann}(X_2)$ oraz $\text{Ann}(\text{lin}(X_1) \cap \text{lin}(X_2)) = \text{Ann}(X_1) + \text{Ann}(X_2)$.
- (c) Pokaż, że $\text{Ann}(\text{Ann}(X)) = \text{lin}(X)$.

Zadanie 10.

Przekształcenie $V \rightarrow V^{**}$. Dla przestrzeni V nad ciałem K definiujemy następujące odwzorowanie $\Psi : V \rightarrow V^{**}$:

$$\forall_{v \in V, \lambda \in V^*} \Psi(v)(\lambda) = \lambda(v)$$

Pokaż, że tak zdefiniowane Ψ jest przekształceniem liniowym i monomorfizmem. Pokaż, że dla przestrzeni skończonego wymiaru przekształcenie Ψ jest izomorfizmem. Znajdź przykład przestrzeni, dla której Ψ nie jest epimorfizmem.

GAL1, zima 2024/2025
Zadania na trzynasty tydzień (13.01.2024-17.01.2024)

Funkcjonały i wyznaczniki

Zadanie 1.

Niech $f, g: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ będą funkcjonalami zadanymi wzorami $f(x, y) = x + iy, g(x, y) = x - iy$. Wykaż, że $\{f, g\}$ stanowią bazę $(\mathbb{C}^2)^*$. Znajdź taką bazę $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^2$, że $\{f, g\}$ jest bazą sprzężoną do $\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Zadanie 2.

Niech $n \in \mathbb{N}$. Badamy funkcjonały liniowe na przestrzeni macierzy: $\Phi: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Opisz wszystkie funkcjonały spełniające tożsamość $\Phi(AB) = \Phi(BA)$ dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Zadanie 3.

Dla dowolnych dwóch przestrzeni liniowych V, W nad ciałem K rozpatrzmy funkcję zdefiniowaną na produkcie kartezjańskim

$$\begin{aligned} V^* \times W &\longrightarrow L(V, W) \\ (\lambda, w) &\longrightarrow (v \mapsto \lambda(v) \cdot w) \end{aligned}$$

Pokaż, że tak zdefiniowana funkcja jest liniowa pod każdej współrzędnej, ale zwykle nie jest liniowa jako przekształcenie $V^* \oplus W \rightarrow L(V, W)$. Załóżmy, że V i W są skończonego wymiaru: pokaż, że przy tym założeniu $\varphi \in L(V, W)$ jest w obrazie wyżej zdefiniowanej funkcji wtedy i tylko wtedy gdy rząd przekształcenia liniowego φ wynosi co najwyżej jeden.

Podstawowe własności wyznacznika pozwalające go obliczyć

1. Wyznacznik macierzy jednostkowej:

$$\det(I) = 1.$$

2. Jeśli dwa wiersze (lub dwie kolumny) są jednakowe lub proporcjonalne, to:

$$\det(A) = 0.$$

3. Jeśli ustalony wiersz (lub kolumnę) pomnożymy przez skalar a , to wyznacznik macierzy również mnoży się przez a :

$$\det(A') = a \cdot \det(A).$$

4. Dodanie do jednego wiersza (lub kolumny) wielokrotności innego wiersza (lub kolumny) nie zmienia wartości wyznacznika:

$$\det(A') = \det(A).$$

5. Zamiana dwóch wierszy (lub kolumn) macierzy zmienia znak wyznacznika:

$$\det(A') = -\det(A).$$

6. W przypadku macierzy trójkątnej (górnej lub dolnej) wyznacznik jest iloczynem elementów na przekątnej:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Zadanie 4.

Oblicz wyznacznik macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Zadanie 5.

Policz wyznacznik następującej macierzy $n \times n$ o współczynnikach wymiernych:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & (n-2) & (n-1) & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & (n-1) & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ (n-1) & n & n & \cdots & n & n & n \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{bmatrix}$$

Zadanie 6.

Załóżmy, że dla dowolnego $n \geq 1$ macierze $A_n = [a_{ij}]$, $B_n = [b_{ij}]$ wymiaru $n \times n$ mają wyrazy wymierne zdefiniowane następującymi wzorami

$$a_{ij} = \max\{i, j\} \quad \text{oraz} \quad b_{ij} = \frac{1}{\min\{i, j\}}, \quad \text{dla } 1 \leq i, j \leq n.$$

Oblicz wyznaczniki macierzy A_n i B_n oraz znajdź macierz odwrotną do A_n .

Zadanie 7.

Założmy, że K jest ciałem oraz $n > 1$. Dla macierzy $A, B \in M_{n \times n}(K)$ rozważmy następujące warunki:

- (1) $\text{tr}(AX) = \text{tr}(BX)$ dla dowolnej macierzy $X \in M_{n \times n}(K)$.
- (2) $\det(A + X) = \det(B + X)$ dla dowolnej macierzy $X \in M_{n \times n}(K)$.

Dowiedź, że gdy macierze A, B spełniają warunek (1) lub (2), to $A = B$.

Zadanie 8.

Rozpatrzmy macierze $A \in M_{n \times n}(k)$, $B \in M_{m \times m}(k)$ i $C \in M_{n \times m}(k)$ i zdefiniujmy następującą macierz $(n+m) \times (n+m)$:

$$D = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Pokaż, że $\det(D) = \det(A) \cdot \det(B)$. Pokaż, że jeśli $A, B, C, D \in M_{n \times n}(k)$ oraz

$$E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n \times 2n}(k)$$

to niekoniecznie $\det(E) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.

Zadanie 9.

Rozpatrzmy $n \geq 2$ zmiennych (lub liczb) $x_1, x_2, \dots, x_n$. Macierz Vandermonde'a dla tych zmiennych definiujemy jako

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Innymi słowy jeśli $A = [a_{ij}]$ to $a_{ij} = x_i^{j-1}$. Pokaż następującą tożsamość dla tak zdefiniowanej macierzy:

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Zadanie 10.

Rozpatrzmy macierz $A = [a_{ij}]$ o wymiarach $n \times n$ i załóżmy ponadto, że wszystkie współczynniki w macierzy A są cyframi, czyli dla każdej pary $1 \leq i, j \leq n$ zachodzi $a_{ij} \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Niech p będzie liczbą pierwszą taką, że p dzieli każdą z n -cyfrowych liczb, która w zapisie dziesiętnym ma postać $a_{i1}a_{i2} \dots a_{in}$, gdzie $i = 1, \dots, n$. Pokaż, że p dzieli $\det(A)$.

GAL1, zima 2024/2025
Zadania na czternasty tydzień, 20.01.2025-24.01.2025

Zadanie 1.

Dany jest układ wektorów $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Wykaż, że ten układ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg funkcjonałów $f_1, f_2, \dots, f_n \in V^*$, takich że macierz $[a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} = [f_i(v_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$ jest maksymalnego rzędu.

Zadanie 2.

Policz wyznacznik następującej macierzy $n \times n$ dla $n \geq 3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 3.

Dla ciała K charakterystyki $\neq 2$ niech $A \in M_{n \times n}(K)$ będzie macierzą antysymetryczną czyli taką, że $A^T = -A$. Pokaż, że jeśli n jest nieparzyste to $\det(A) = 0$. Znajdź wzór na wyznacznik macierzy antysymetrycznej 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_2 & -x_4 & 0 & x_6 \\ -x_3 & -x_5 & -x_6 & 0 \end{bmatrix}$$

Pokaż, że w tym przypadku $\det(A)$ jest kwadratem wielomianu jednorodnego pf_A stopnia 2 od zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_6$ (ta obserwacja ma uogólnienie dla dowolnego parzystego n , otrzymane wielomiany nazywamy pfaffianami <https://en.wikipedia.org/wiki/Pfaffian>). Policz pf_A dla macierzy, która nad przekątną ma $x_1, \dots, x_{n-1}$, pod przekątną $-x_1, \dots, -x_{n-1}$, a gdzie indziej zera.

Zadanie 4.

- (a) Używając wzorów Cramera znajdź wzór na macierz odwrotną do macierzy $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$ takiej, że $\det(A) \neq 0$.
- (b) Wykaż, że jeśli $A \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$ i $\det(A) = \pm 1$, to $A^{-1} \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$.
- (c) Wykaż, że jeśli $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$ jest górnotrójkątna i $\det(A) \neq 0$, to A^{-1} również jest górnotrójkątna.

Zadanie 5.

Obliczyć wyznacznik $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(Obliczyć wartość wyznacznika dla kilku pierwszych wartości n i udowodnić ogólny wzór indukcyjnie.)

Kolokwium 2 z roku 2018/19

Zadanie 6.

Dla $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie liniowe $\varphi_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem

$$\varphi_t(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + tx_3, x_1 - x_2 - x_4, tx_2 + tx_3 + (t-1)x_4).$$

- (a) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie φ_t jest epimorfizmem?
- (b) Znaleźć bazę $\ker(\varphi_2)$.
- (c) Znaleźć wymiar przestrzeni $\ker(\varphi_0) \cap \ker(\varphi_1)$.

Zadanie 7.

Dane są: baza $A = \{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 2, 0)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, baza $B = \{(-1, 1), (-1, 2)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_3),$$

oraz przekształcenie liniowe $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że

$$M(\psi)_A^A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Obliczyć macierz $M(\varphi)_A^B$.
- (b) Obliczyć $\psi(1, 0, 0)$.
- (c) Znaleźć bazę C przestrzeni $\mathbb{R}^3$ taką, że macierz $M(\psi)_A^C$ jest górną-trójkątną, tzn. taką, że wszystkie elementy pod główną przekątną są zerami.

Zadanie 8.

(Teoretyczne) Niech V, W będą skończone wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $\varphi : V \rightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że

$$\dim(V) = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{im}(\varphi)).$$

Zadanie 9.

Dla $t \in \mathbb{C}$ oraz $n \geq 2$ dana jest macierz $A_{n,t} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$,

$$A_{n,t} = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & t & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \end{pmatrix}.$$

- (a) Dla każdego $n \geq 2$ obliczyć wyznacznik macierzy $A_{n,0}$.
- (b) Wykazać, że istnieje $t \in \mathbb{R}$ takie, że $\det(A_{5,t}) = 0$.

Zadanie 10.

Dane są przestrzenie liniowe V, W nad ciałem K , $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ oraz przekształcenie liniowe $\varphi : V \rightarrow V$. Definiujemy funkcję $\Phi : L(V, W) \rightarrow L(V, W)$ wzorem

$$\Phi(\psi) = \psi \circ \varphi.$$

- (a) Wykazać, że Φ jest przekształceniem liniowym.
- (b) Wyrazić wyznacznik przekształcenia Φ za pomocą m, n oraz $\det(\varphi)$.

Zadanie 11.

(3 punkty za każde zadanie)

- (a) Niech V i W będą skończone wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K . Czy dla każdego przekształcenia liniowego $\varphi : V^* \rightarrow W^*$ istnieje przekształcenie liniowe $\psi : W \rightarrow V$ takie, że $\psi^* = \varphi$?
- (b) Załóżmy, że macierz $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ jest odwracalna. Czy macierz $B = (b_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ taka, że $b_{ij} = j^2 a_{ij}$ musi być odwracalna?
- (c) Dane są przekształcenia liniowe $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Czy musi istnieć niezerowy wektor $\alpha \in \mathbb{R}^5$ taki, że $\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(\alpha)$?
- (d) Dane jest niezerowe przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Czy złożenie $\varphi \circ \varphi$ też musi być niezerowe?
- (e) Czy istnieją macierze $A \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$ i $B \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ takie, że $\det(AB) = 1$?
- (f) Dana jest baza $B = \{\beta_1 = (1, 2, 3), \beta_2 = (2, 3, 4), \beta_3 = (1, 0, 1)\}$. Obliczyć współrzędne funkcjonału $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$,

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + x_3$$

w bazie sprzężonej do B .

GAL1, zima 2024/2025
Zadania domowe, pierwsza seria
Termin zwrotu: 25.10, 22:00

Zadanie 1.

Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Rozwiązać układ równań liniowych $n \times n$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

$a_{i,j} = \binom{i}{j-1}$, $b_i = 2^i$ dla $i, j = 1, 2, \dots, n$. Dla przykładu dla $n = 5$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 & = 8 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 & = 16 \\ x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 10x_4 + 5x_5 & = 32 \end{cases}$$

Zadanie 2.

Rozwiąż następujący układ równań liniowych w liczbach rzeczywistych w zależności od rzeczywistych parametrów $t, s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + tx_3 + sx_4 & = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + tx_4 & = s \\ x_1 + x_3 & = t \end{cases}$$

Przedstaw kolejne kroki swoich obliczeń.

Zadanie 3.

Znajdź współczynniki wielomianu $w(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$, który przyjmuje następujące wartości: $w(1+i) = 0$, $w(2-i) = 1$ oraz $w(1) = i$.

Zadanie 4.

Niech $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$, czyli $\mathbb{C}$ z dołączonym jednym elementem oznaczanym ∞ . Dla liczb zespolonych $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ definiujemy funkcję $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{gdy } cz+d \neq 0 \\ \infty & \text{gdy } cz+d = 0 \end{cases}, \quad f(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Taka funkcja (gdy $ad - bc \neq 0$) nazywa się homografią. Zbiory

$$\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{im}(z) > 0\}, \quad \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

nazywamy *górną półpłaszczyzną* i *jednostkowym dyskiem*. Wskazać wszystkie homografie, które

(a) zachowują $\mathbb{H}_+$ (tzn $f(\mathbb{H}_+) = \mathbb{H}_+$)

(b) zachowują $\mathbb{D}$ (tzn $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$)

Zadanie 5.

Rozważamy wielomiany zmiennej zespolonej.

(a) Znajdź wielomian $f(z)$ o całkowitych współczynnikach, którego jedynymi pierwiastkami są pierwiastki pierwotne z 1 stopnia 24.

(b) Przedstaw powyższy wielomian jako iloczyn wielomianów nierozkładalnych na $\mathbb{R}$.

Przypomnienie: Liczba $z \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem pierwotnym z 1 stopnia n wtedy i tylko wtedy, gdy $z^n = 1$ oraz $z^m \neq 1$ dla $0 < m < n$.

GAL1, zima 2024/2025

Zadania domowe, druga seria

Termin zwrotu: 12.11, godzina 22:00

Zadanie 1.

Sprawdź, czy dany zbiór jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ wszystkich ciągów o wyrazach rzeczywistych:

- (a) $\{(x_n)_{n=0}^{\infty} : \exists M \in \mathbb{R} \forall n \geq 0 \sum_{i=0}^n a_i^2 < M\}$.
- (b) $\{(x_n)_{n=0}^{\infty} : \exists f \in \mathbb{R}[x] \forall n \geq 0 |a_n| = f(n)\}$,
- (c) $\{(x_n)_{n=0}^{\infty} : \exists k \in \mathbb{N} \forall n \geq 0 |a_n| \leq \sin^2(kn)\}$.

Zadanie 2.

Dla ustalonego $n \geq 1$ rozpatrzmy funkcje $f_1, \dots, f_n \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pokaż, że funkcje $f_1, \dots, f_n$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy gdy istnieją liczby rzeczywiste $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ takie, że wektory $v_i = (f_1(a_i), \dots, f_n(a_i)) \in \mathbb{R}^n$, gdzie $i = 1, \dots, n$, są liniowo niezależne.

Zadanie 3.

Rozważmy wielomiany $f_{n,k} = (x+k)^n \in \mathbb{Q}[x]$. Dla jakich par $n, k \in \mathbb{N}$ układ

$$\{f_{n,1}, f_{n,2}, \dots, f_{n,k}\}$$

jest liniowo niezależny? Dla jakich par $n, k \in \mathbb{N}$ układ ten rozpiną przestrzeń wielomianów stopnia $\leq n$?

Zadanie 4.

Niech $R = \mathbb{R}[[t]]$ będzie pierścieniem szeregów formalnych. Jego elementami są wyrażenia postaci

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

które dodajemy i mnożymy w oczywisty sposób. Na przykład

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

gdzie

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Wykazać, że wielomian

$$(t^5 + 1)x^5 + (t^3 + t)x + tx^3 - 1 \in R[x]$$

ma pierwiastek postaci $x = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots \in \mathbb{R}[[t]]$.

Zadanie 5.

Pochodną szeregu formalnego $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots \in \mathbb{R}[[t]]$ nazywamy szereg formalny $f'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \dots$. Proces brania pochodnej można iterować.

- (a) Znajdź rozwiązanie równania

$$f''(t) + f(t) = 0, \quad f(t) = t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots,$$

gdzie niewiadomą jest szereg $f(t)$, tzn. współczynniki a_i dla $i \geq 2$.

- (b) Udowodnij, że istnieje rozwiązanie równania

$$f''(t) + t f'(t) + f(t) = 0, \quad f(t) = t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots,$$

gdzie niewiadomą jest szereg $f(t)$, tzn. współczynniki a_i dla $i \geq 2$.

(Dla ciekawych, którzy obliczą kilka pierwszych wartości a_i polecamy stronę <https://oeis.org>)

GAL1, zima 2024/2025

Zadania domowe, trzecia seria

Termin zwrotu: 26.11, godzina 23:59

Zadanie 1.

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K . Wykaż, że gdy $n > \dim V$, to dla dowolnych wektorów $v_0, \dots, v_n \in V$ istnieją takie, nie wszystkie równe zeru, skalary $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$, że $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$ oraz $\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i = 0$.

Zadanie 2.

Niech $\mathbb{R}[x]_{\leq 4} \subset \mathbb{R}[x]$ oznacza przestrzeń wielomianów stopnia ≤ 4 , czyli wielomianów postaci $w = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, gdzie $a_0, \dots, a_4 \in \mathbb{R}$. Niech $W \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ oznacza zbiór tych wielomianów w stopnia ≤ 4 , dla których funkcje wielomianowe $\tilde{w} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają warunek

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad x^4 \cdot \tilde{w}\left(\frac{1}{x}\right) = \tilde{w}(x)$$

- (a) Przedstaw podzbiór $W \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ jako zbiór rozwiązań układu równań jednorodnych zadających relacje między współczynnikami $a_0, \dots, a_4 \in \mathbb{R}$. Uzasadnij dlaczego W jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$.
- (b) Rozpatrzmy wielomiany $w_1 = 1 + tx^2 + x^4$, $w_2 = sx^2$, $w_3 = 1 + tx + x^2 + tx^3 + x^4$ zależne od parametrów $s, t \in \mathbb{R}$. Jakie warunki winny spełniać parametry s i t aby wielomiany w_1, w_2, w_3 stanowiły bazę przestrzeni W ?
- (c) W tym punkcie połóżmy $s = t = 1$. Znajdź współrzędne wielomianu $x + 2x^2 + x^3$ w bazie składającej się z w_1, w_2 i w_3 dla $t = s = 1$.

Zadanie 3.

Dane są dwie macierze $m \times n$ nad ciałem K :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Założmy, że podprzestrzenie $V_A, V_B \subset K^n$ są zbiorami rozwiązań jednorodnych układów m równań liniowych, których macierze są równe, odpowiednio, A i B . Definiujemy macierz $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ rozmiaru $2m \times n$ i macierz $[A \ B]$ rozmiaru $m \times 2n$:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}, \quad [A \ B] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Czy znając wymiary przestrzeni $V_A, V_B, V_A + V_B$ można wyznaczyć rząd macierzy $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$? A macierzy $[A \ B]$? Pokaż, że rząd macierzy $[A \ B]$ może przyjmować dowolną wartość całkowitą z przedziału $[\max(r(A), r(B)), \min(r(A) + r(B), m)]$.

Zadanie 4.

Niech K będzie ciałem. W przestrzeni K^n wektory standardowej bazy oznaczamy przez $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$. Dla $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ niech $V_k = \text{lin}\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k\}$. Dla dowolnej podprzestrzeni $W \subset K^n$ definiujemy ciąg liczb

$$d(W) = \{\dim(W \cap V_k)\}_{k=1,2,\dots,n} \in \mathbb{Z}^n.$$

- (a) Dla jakich ciągów $\underline{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in \mathbb{Z}^n$ istnieje podprzestrzeń liniowa $W \subset K^n$ taka, że $d(W) = \underline{a}$?
- (b) Załóżmy, że K jest skończonym ciałem. Dla $\underline{a} \in \mathbb{Z}^n$ ile jest podprzestrzeni W takich, że $d(W) = \underline{a}$.
- (c) Podać kombinatoryczną interpretację współczynnika przy p^ℓ w wielomianie

$$\frac{(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \dots (p^n - p^{d-1})}{(p^d - 1)(p^d - p)(p^d - p^2) \dots (p^d - p^{d-1})}.$$

Zadanie 5.

Niech $d \geq 1$. Załóżmy, że $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest taką rodziną d -wymiarowych podprzestrzeni pewnej przestrzeni liniowej, że $\dim(V_i \cap V_j) = d - 1$ dla dowolnych $i \neq j$. Uzasadnij, że $\dim(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n) = d - 1$ lub $\dim(\sum_{n \in \mathbb{N}} V_n) = d + 1$.

GAL1, zima 2024/2025
Zadania domowe, czwarta seria

Termin zwrotu: 20.12, godzina 23:59

Zadanie 1.

Dane jest przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^3$ takie, że

$$\varphi((2, 3, 4)) = (1, 1, 1), \quad \varphi((0, 2, 3)) = (0, 1, 1), \quad \varphi((3, 4, 5)) = (-1, -1, 0).$$

- (a) Znajdź macierz φ w standardowej bazie.
- (b) Znajdź macierz φ w bazie $A = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$.

Zadanie 2.

Niech $f : M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ będzie dane wzorem

$$f(X) = AX - XA, \quad \text{gdzie } A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Sprawdź, że f jest przekształceniem liniowym.
- (b) Wyznacz macierz $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ w bazie $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, gdzie E_{ij} jest macierzą, w której jedynym niezerowym wyrazem jest (i, j) -ty wyraz i jest on równy 1.
- (c) Znajdź bazy i wymiary przestrzeni $\ker(f)$ oraz $\operatorname{im}(f)$.

Zadanie 3.

Dane są trzy przekształcenia liniowe $f, g, h : \mathbb{C}^7 \rightarrow \mathbb{C}^3$. Czy zawsze istnieje wektor niezerowy $\beta \in \mathbb{C}^7 \setminus \{0\}$ taki, że

$$f(\beta) = g(\beta) = h(\beta) ?$$

Znaleźć rozwiązanie powyższego problemu dla przekształceń $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Zadanie 4.

Przekształcenie liniowe przestrzeni liniowej V w siebie $\varphi : V \rightarrow V$ nazywamy endomorfizmem V . Niech V będzie przestrzenią nad ciałem K wymiaru n ; przekształcenie $\varphi : V \rightarrow V$ nazywamy nilpotentnym jeśli dla pewnego r , r -krotne złożenie φ^r jest endomorfizmem zerowym. Macierz $A \in M_{n \times n}(K)$ nazywamy nilpotentną, jeśli istnieje liczba całkowita $r > 0$ taka, że produkt A^r jest macierzą zerową.

- (a) Pokaż, że endomorfizm $\varphi : V \rightarrow V$ jest nilpotentny wtedy i tylko wtedy gdy jego macierz $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ w dowolnej bazie $\mathcal{A}$ przestrzeni V jest nilpotentna.
- (b) Pokaż, że dla endomorfizmu nilpotentnego φ mamy wstępujący ciąg podprzestrzeni

$$0 \subsetneq \ker \varphi \subseteq \ker \varphi^2 \subseteq \ker \varphi^3 \subseteq \dots \subseteq V$$

$$\text{oraz } \ker \varphi^s = \ker \varphi^{s+1} \iff \ker \varphi^s = V.$$

- (c) Pokaż, że dla endomorfizmu nilpotentnego φ mamy zstępujący ciąg podprzestrzeni

$$V \supsetneq \operatorname{im} \varphi \supseteq \operatorname{im} \varphi^2 \supseteq \operatorname{im} \varphi^3 \supseteq \dots \supseteq 0$$

$$\text{oraz } \operatorname{im} \varphi^s = \operatorname{im} \varphi^{s+1} \iff \operatorname{im} \varphi^s = 0.$$

- (d) Pokaż, że jeśli φ jest nilpotentny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V taka, że macierz $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ ma zera na przekątnej i pod przekątną.

Zadanie 5.

Push-out P odwzorowań $V_1 \xleftarrow{\phi_1} W \xrightarrow{\phi_2} V_2$ definiujemy poprzez własność uniwersalną

$$\begin{array}{ccccc}
 W & \xrightarrow{\phi_1} & V_1 & & \\
 \downarrow \phi_2 & & \searrow \forall \psi_1 & & \downarrow \pi_1 \\
 & & Z & & \\
 \downarrow \forall \psi_2 & \nearrow & \nearrow \exists! \psi & \searrow & \downarrow \\
 V_2 & \xrightarrow{\pi_2} & P & &
 \end{array}$$

Dla każdej pary przekształceń $\psi_1 : V_1 \rightarrow Z$, $\psi_2 : V_2 \rightarrow Z$ takiej, że $\psi_1 \phi_1 = \psi_2 \phi_2$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie $\psi : P \rightarrow Z$ takie, że $\psi_1 = \psi \pi_1$ i $\psi_2 = \psi \pi_2$.

Udowodnić, że w kategorii przestrzeni wektorowych $P = (V_1 \oplus V_2)/U$, gdzie

$$U = \{(\phi_1(w), -\phi_2(w)) \mid w \in W\}.$$

GAL1, zima 2024/2025
Zadania domowe, piąta seria

Termin zwrotu: 24.01, piątek, godzina 23:59

Zadanie 1.

- (a) Rozpatrzmy macierze o współczynnikach rzeczywistych

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ t & t & t & t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ macierz B jest odwracalna? Zakładając, że macierz B jest odwracalna, oblicz wyznacznik produktu $B \cdot A \cdot B^{-1}$.

- (b) Załóżmy, że macierz $X \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ jest odwracalna i spełnia równanie macierzowe $X - 4X^{-1} = 0$. Policz $|\det(X)|$.

Zadanie 2.

Założmy, że macierze A , B , C na ciałem K mają takie wymiary, że poniższe iloczyny są określone. Udowodnij następującą zależność pomiędzy rzędami:

$$r(AB) + r(BC) \leq r(B) + r(ABC).$$

Zadanie 3.

Założmy, że V jest przestrzenią liniową oraz $f \in L(V, V)$.

- (a) Wykaż, że $\ker(f) = \ker(f^2) \Leftrightarrow \ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.
(b) Wykaż, że $\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(f^2) \Leftrightarrow \ker(f) + \operatorname{im}(f) = V$.

Zadanie 4.

Przypomnijmy, że ślad macierzy kwadratowej $B = [b_{ij}] \in M_{n \times n}(K)$ to suma elementów na przekątnej: $\operatorname{tr}(B) = \sum_{i=1}^n b_{ii}$. Dla macierzy kwadratowej $A \in M_{n \times n}(K)$ niech $f_A: M_{n \times n}(K) \rightarrow K$ będzie funkcją określoną wzorem $f_A(X) = \operatorname{tr}(AX)$ dla każdej $X \in M_{n \times n}(K)$.

- (a) Wykaż, że dla każdej macierzy $A \in M_{n \times n}(K)$ funkcja f_A jest funkcjonałem liniowym.
(b) Wykaż, że dla każdego funkcjonału liniowego $f \in M_{n \times n}(K)^*$ istnieje dokładnie jedna macierz $A \in M_{n \times n}(K)$ taka, że $f = f_A$.

Zadanie 5.

Niech $\dim V = n$ oraz niech $f_1, f_2, \dots, f_n \in V^*$. Wykazać, że układ $\mathcal{U} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ jest bazą V^* wtedy i tylko wtedy gdy $\bigcap_{i=1}^n \ker(f_i) = \{0\}$.