

Zadania z funkcji analitycznych 2015

1 Załóżmy, że $ad - bc \neq 0$. Udowodnić, że funkcja $h : \{z \in \mathbb{C} \mid cz + d \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ zadana formułą $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ przedłuża się do homeomorfizmu $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$.

2 Wykazać, że homografie przekształcają okręgi (lub proste) na okręgi (lub proste).

3 Dana dwie niezerowe liczby $a \neq b \in \mathbb{C}$. Niech O_1 będzie okręgiem zawierającym a, b i 0 . Niech O_2 będzie okręgiem zawierającym a i b oraz prostopadłym do O_1 . Niech O_3 będzie okręgiem prostopadłym do O_1 i O_2 oraz przechodzącym przez 0 . Udowodnić, że $O_1 \cap O_3 = \{0, c\}$, gdzie c jest średnią harmoniczną a i b .

4 Niech A będzie okręgiem lub prostą oraz niech B będzie okręgiem lub prostą. Udowodnić, że istnieje homografia przekształcająca A na B .

5 Udowodnić, że homografia zadana przez macierz o wyrazach rzeczywistych zachowuje

$$\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{im}(z) > 0\}.$$

6 Pokazać, że homografia $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$ przeprowadza $\mathbb{H}_+$ na dysk jednostkowy $\mathbb{D}$. Opisać obrazy prostych $\operatorname{re} z = \operatorname{const}$, $\operatorname{im} z = \operatorname{const}$ oraz okręgów $|z| = \operatorname{const}$.

7 Pokazać, że homografia $h(z) = -\frac{z+1}{z-1}$ przekształca $\mathbb{D} \cap \mathbb{H}_+$ na $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{im} z > 0, \operatorname{re} z > 0\}$ i opisać obrazy prostych przechodzących przez zero i okręgów o środku w zerze.

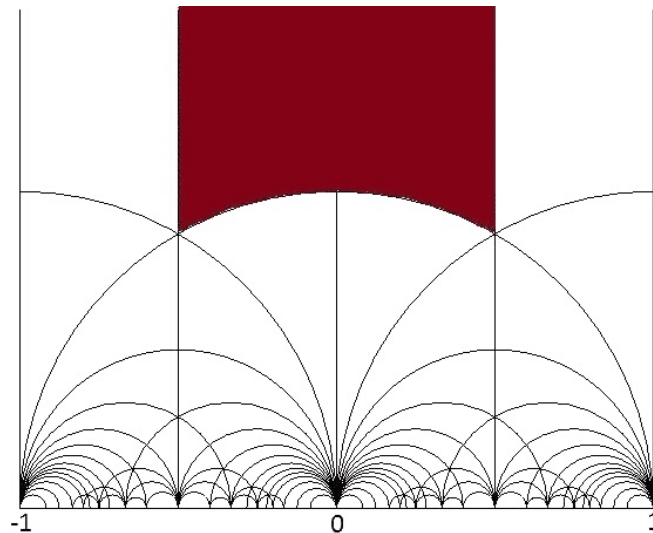
8 Pisemnie. Niech

$$F = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{re} z| \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

Wykazać, że

$$\mathbb{H}_+ = \bigcup_{A \in SL_2(\mathbb{Z})} h_A(F),$$

gdzie h_A jest homografią zadaną przez macierz A .



9 Niech $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$. Definiujemy dwustosunek czwórki punktów jako

$$d(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}.$$

Wykazać, że homografie zachowują dwustosunek.

10 Dane dwie czwórki parami różnych punktów $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ i $z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 \in \overline{\mathbb{C}}$. Wykazać, że jeśli $d(z_1, z_2, z_3, z_4) = d(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4)$ to istnieje homografia przekształcająca jedną czwórkę na drugą.

11 Niech $f(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$ będzie wielomianem, który spełnia $\sup_{|z|=1} |f(z)| = M$. Udowodnić, że $\sum_{k=0}^m |a_k|^2 \leq 2\pi M^2$. Wywnioskować stąd, że jeśli wielomiany f_n dążą do 0 na S^1 w normie supremum, to sumy kwadratów modułów ich współczynników dążą do 0.

12 Udowodnić, że nie istnieje ciąg wielomianów dążących w normie supremum na S^1 do funkcji $z \mapsto \bar{z}$.

na wtorek 17 marca

13 W których punktach funkcja $f(x, y) = x e^y + i y e^x$ ma pochodną zespoloną?

14 Niech x i y będą współrędnymi w $\mathbb{R}^2$. Formalnie $x, y \in (\mathbb{R}^2)^*$. Bazą przestrzeni $(\mathbb{R}^2)^* \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^2$ są funkcjonały $dz := dx + i dy$ oraz $d\bar{z} := dx - i dy$. Znaleźć bazę sprzężoną przestrzeni $(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^2$.

15 Niech $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Przekształcenie rzeczywistych 2×2 macierzy $A \mapsto JAJ^{-1}$ jest involucją i zadaje rozkład na przestrzenie własne $M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = V_1 \oplus V_{-1}$. Dana funkcja $f = (u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Zapisać macierz pochodnych cząstkowych jako sumę macierzy niezmienniczych i anty niezmienniczych. Porównać ten rozkład z rozkładem różniczki na $\frac{\partial f}{\partial z}$ i $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ reprezentowanych jako macierze (korzystając z utożsamienia $\mathbb{C}$ z macierzami rzeczywistymi 2×2 postaci $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$).

16 Dana funkcja holomorphyzna $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Niech $g = |f|^2 : U \rightarrow \mathbb{R}$. Wykazać $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 4|f'|^2$

17 Pokazać, że jeśli $f = u + iv$ jest różniczkowalna, to u i v są harmoniczne, tzn $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ oraz $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Mówimy, że u i v są funkcjami harmonicznymi sprzężonymi.

18 Mając daną funkcję $u(x, y)$ znaleźć wszystkie funkcje harmoniczne do niej sprzężone oraz odpowiednie funkcje holomorphyzne. (a) xy , (b) $x^2 - y^2 + xy$, (c) $\frac{y}{x^2 + y^2}$, (d) $\log |z|$.

19 Pokazać, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by funkcja $u(x, y)$ harmoniczna w obszarze U miała harmoniczną sprzężoną, jest istnienie w obszarze U funkcji pierwotnej do funkcji $f(z) = u_x - i u_y$.

na wtorek 24 marca

20 Niech f będzie funkcją holomorphyzną na otwartym zbiorze. Wykazać:

- a) Jeśli $f(U) \subset \mathbb{R}$, to $f = \text{const}$
- b) Jeśli $\bar{f}$ jest holomorphyzna, to $f = \text{const}$

21 Niech $\sin(z)$ oraz $\cos(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ będą funkcjami zadanymi znanymi szeregami potęgowymi. Udowodnić $\sin(z) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $z = k\pi$, $\cos(z) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $z = (k + \frac{1}{2})\pi$. Ponadto obraz zbioru $-\pi \leq \text{re}(z) \leq \pi$ jest całą płaszczyzną zespoloną.

22 Niech $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ będą funkcjami mi spełniającymi $f_y = g_x$. Wykazać, że funkcja określona wzorem $F(x, y) = \int_0^1 (f(tx, ty)x + g(tx, ty)y) dt$ spełnia równanie $F_x = f$, $F_y = g$.

23 Wykazać, że na zbiorze wypukłym każda funkcja harmoniczna ma sprzężoną.

24 Udowodnić (tw Gauss-Lucas): Niech f będzie wielomianem. A f' jego pochodną. Wtedy pierwiastki zespolone f' są zawarte w uwypukleniu zbioru pierwiastków zespolonych f .

25 Sprawdzić, że $\phi(re^{it}) = (2r \cos(t)/(r^2+1), 2r \sin(t)/(r^2+1), (r^2-1)/(r^2+1))$ zadaje homeomorfizm $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ze sferą jednostkową $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ z usuniętym punktem $(0, 0, 1)$. Wykazać, że przekształcenie to zachowuje kąty pomiędzy krzywymi.

26 Udowodnić, że pole trójkąta o wierzchołkach $0, z_1, z_2$ jest równe $|Im(z_1 \bar{z}_2)|/2$.

27 Każda funkcja wymierna, tzn postaci $f(z)/g(z)$, gdzie f i g są wielomianami, zadaje ciągłą funkcję sfery Riemanna $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$. Czy $\exp$ przedłuża się do $\bar{\mathbb{C}}$?

na wtorek 31 marca

28 Przekształcić różnowartościowo i konforemnie ćwiartkę $\{z : |z| < 1, \operatorname{re}(z) > 0, \operatorname{im}(z) > 0\}$ na dysk jednostkowy.

29 Przekształcić różnowartościowo i konforemnie soczewkę $\{z : |z| < 1, |z - \sqrt{3}| > 2\}$ na górną półpłaszczyznę.

30 Niech $\operatorname{Log}(z) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie gałęzią główną logarytmu oraz $a^b := \exp(b \operatorname{Log}(a))$. Obliczyć a) $\operatorname{Log}(1+i)$, b) i^i , c) $(1-i)^{3i}$, d) $(i^4)^i - i^{4i}$.

31 Niech $\operatorname{Log}(z) : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie gałęzią główną logarytmu. Dla dowolnego $r \in \mathbb{R}$ obliczyć granicę

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (\operatorname{Log}(r+it) - \operatorname{Log}(r-it))$$

32 Obliczyć całkę:

a) $\int_{\gamma} \bar{z} dz, \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$

b) $\int_{\gamma} \frac{dz}{\bar{z}}, \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, \pi/2]$

c) $\int_{\gamma} \frac{dz}{\bar{z}}, \quad \gamma(t) = 1-t+ti, \quad t \in [0, 1]$

33 Obliczyć

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{[-i, i]} \left(\frac{1}{z-s} - \frac{1}{z+s} \right) ds$$

34 Korzystając z tożsamości $\frac{1}{1+w} = 1 - w + w^2 - \dots - (-1)^{n-1} w^{n-1} + (-1)^n \frac{w^n}{1+w}$ pokazać, że dla $z = e^{it}, t \in (-\pi, \pi)$

$$\operatorname{Log}(1+z) = z - z^2/2 + z^3/3 - \dots + R_n(z), \quad \text{gdzie } R_n(z) = (-1)^n \int_{[0, z]} \frac{w^n}{1+w} dw.$$

Wynioskować, że dla $t \in (-\pi, \pi)$ mamy zbieżność

$$\operatorname{Log}(1+e^{it}) = e^{it} - \frac{e^{2it}}{2} + \frac{e^{3it}}{3} - \dots$$

oraz

$$\frac{1}{2}t = \sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) - \dots$$

35 Niech $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną. Pokazać, że dla każdej pętli kawałkami gładkiej

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz \right) = 0.$$

Jeśli zrobimy poprzednie zadania i zostanie czas:

36 Niech $f(z) = \frac{1}{2}(z+z^{-1})$. Udowodnić, że f przekształca różnowartościowo zbiory $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ i $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ na $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, zaś zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{im}(z) > 0\}$ na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \cup (-1, 1)$ (Wskazówka: opisać obrazy brzegów badanych zbiorów.)

37 Zbadać, dla jakich z funkcje $\cos$, $\sin$, tg przyjmują wartości czysto rzeczywiste i czysto urojone.

38 Udowodnić $|\sinh(im(z))| \leq |\cos(z)| \leq |\cosh(im(z))|$.

39 Udowodnić $|\sin(z)| \leq \cosh(|z|)$, $|\cos(z)| \leq \cosh(|z|)$

40 Udowodnić, że każdy dysk o promieniu $\pi\sqrt{2}$ zawiera punkt z taki, że $\cos(z) \in \mathbb{Z}$.

na 14 kwietnia

41 Pokazać, że dla $|z| < \frac{1}{2}$ zachodzą nierówności:

$$\frac{1}{2}|z| \leq |\operatorname{Log}(1+z)| \leq \frac{3}{2}|z|.$$

Wskazówka: $\operatorname{Log}(1+z) = \int_{[0,z]} \frac{1}{1+w} dw$.

42 Znaleźć relację pomiędzy $\int_{[a,b]} f(z) dz$ a $\int_{[a,b]} \overline{f(z)} dz$. Wykazać, że równość

$$\overline{\int_{[a,b]} f(z) dz} = \int_{[a,b]} \overline{f(z)} dz$$

zachodzi dla każdej funkcji f wtedy i tylko wtedy gdy $b-a \in \mathbb{R}$.

43 a) Podać przykład funkcji holomorficzej F określonej na otoczeniu odcinka $[a, b]$, takiej, że nie istnieje $t \in [0, 1]$ o własności $F(b) - F(a) = F'(ta + (1-t)b) \cdot (b-a)$.

b) Niech F będzie funkcją holomorficzną. Udowodnić, że istnieje $v \in \operatorname{conv}(F'(ta + (1-t)b) \mid t \in [0, 1])$ o własności $F(b) - F(a) = v \cdot (b-a)$.

44 Niech γ będzie krzywą postaci $\gamma(t) = r(t)e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, gdzie $r(t)$ jest funkcją ciągłą, dodatnią i $r(2\pi) = r(0)$. Wykazać, że krzywa γ rozcina płaszczyznę na dokładnie dwie składowe. Wsk: rozważać całkę $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$ dla $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 2\pi])$.

45 Niech P i Q będą wielomianami oraz $\deg(P) < \deg(Q) - 1$. Załóżmy, że wszystkie pierwiastki Q leżą w obszarze ograniczonym przez zamkniętą krzywą bez samoprzecięć γ . Obliczyć całkę $\int_{\gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$.

na 21 kwietnia

46 Dla $|a| \neq r \neq |b|$ obliczyć $\int_{\partial(D_r)} (z-a)^{-m}(z-b)^{-n} dz$, gdzie $\partial(D_r)$ jest brzegiem dysku o środku w 0 i promieniu r .

47 Obliczyć $\int_{\partial(D_2)} (z^2 - 1)^{-n} dz$.

48 Wykazać, że $\int_{\partial U} \bar{z} dz = 2i \cdot \operatorname{pole}(U)$

49 Do domu pisemnie. Niech f będzie funkcją holomorficzną określoną dla $z \leq R$. Wykazać, że

$$\int_{|z| \leq R} f(z) dx dy = \pi R^2 f(0).$$

50 Niech P i Q będą wielomianami oraz $\deg(P) = \deg(Q) - 1$. Załóżmy, że wszystkie pierwiastki Q leżą w obszarze ograniczonym przez zamkniętą krzywą bez samoprzecięć γ . Obliczyć całkę $\int_{\gamma} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$.

na 28 kwietnia

51 Niech f będzie funkcją holomorficzną określoną dla $z \leq R$. Przez ξ_n oznaczamy pierwiastek pierwotny stopnia n z jedynki. Pokazać, że $f(0)$ jest granicą średnich arytmetycznych swoich wartości w wierzchołkach n -kąta, tzn.

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n f(R\xi_n^k)}{n}.$$

52 Rozwinąć funkcję $\frac{1}{1+z^2}$ w szereg Taylora wokół punktu 1 i znaleźć promień zbieżności

53 Wykazać, że jeśli f jest holomorficzną to ciąg $\left(\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ jest ograniczony.

54 Niech $f : \mathbb{C} \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$, będzie funkcją holomorficzną, przy czym zakładamy, że zbiór A jest dyskretny oraz w żadnym punkcie z A nie można określić holomorficznego przedłużenia f . Wykazać że promień zbieżności szeregu Taylora w zerze jest równy $\min\{|a| : a \in A\}$.

55 Dana funkcja holomorficzna f na otoczeniu dysku jednostkowego $\overline{D}_1$. Rozwinięcie f jest postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Zakładamy, że $|f(z)| \leq 1$ na D_1 . Wykazać, że dla $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \frac{|z|^k}{1-|z|} \text{ dla } z \in D_1$$

Wsk. Skorzystać z nierówności Cauchy'ego $|a_n| \leq \frac{M_f(r)}{r^n}$, gdzie $M_r(f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.

56 Dana funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Pokazać, że jeśli dla pewnych $M, R > 0$,

$$|f(z)| \leq M|z^n|$$

dla $|z| > R$, to f jest wielomianem stopnia n .

57 Niech $f(z)$ będzie wielomianem stopnia n . Pokazać, że dla $0 < r < s$ mamy

$$\frac{M_f(r)}{r^n} \geq \frac{M_f(s)}{s^n},$$

a równość zachodzi tylko gdy $f(z) = az^n$ dla $a \neq 0$.

na 5 maja

58 Funkcja holomorficzna f jest określona w otoczeniu zera. Wykazać, że jeśli f przyjmuje wartości rzeczywiste we wszystkich punktach postaci $\frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to rozwinięcie $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ma wszystkie współczynniki rzeczywiste.

59 Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie otwartym zbiorem ograniczonym oraz niech $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą, holomorficzną na U . Wykazać, że jeśli moduł f jest stały na ∂U , to albo f jest stała, albo f zeruje się w pewnym punkcie $z_0 \in U$.

60 Niech f będzie funkcją holomorficzną określoną na otoczeniu dysku. Załóżmy, że $f(S^1) \subset \mathbb{R}$. Czy f musi być stała? (Wsk. skorzystać z zadania poprzedniego dla $\exp(if(z))$.)

61 Niech $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ będzie funkcją holomorficzną. Udowodnić, że f jest postaci $\frac{g}{h}$, gdzie g i h są wielomianami.

62 Wykazać, że jeśli wielomian $P(z)$ stopnia n spełnia oszacowanie $|P(z)| \leq M$ na kole jednostkowym, to poza kołem jednostkowym spełnia $|P(z)| \leq M|z|^n$.

63 PISEMNE Niech $P(z)$ będzie wielomianem stopnia n . Zakładamy, że mamy oszacowanie $|P(z)| \leq M$ na odcinku łączącym -1 i 1 . Udowodnić, że $|P(z)| \leq M(a+b)^n$ wewnątrz elipsy o ogniskach $-1, 1$ i półosiach a i b .

Wsk. Rozważyć przekształcenie $z = \frac{1}{2}(w + w^{-1})$. Jeśli $\phi(w) = \frac{1}{2}(w + w^{-1})$, to $\phi(\{|z| = r\}) = \text{elipsa}$.

Uwaga: Stwierdzenie, że $a > b$ są półosiami elipsy o ogniskach 1 i -1 implikujemy, że $a^2 - b^2 = 1$. Wtedy $a = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})$, $b = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})$ dla pewnego $r \in \mathbb{R}$.

64 Niech f będzie funkcją holomorficzną na otoczeniu dysku domkniętego o środku w 0 i promieniu r . Niech $M = M_f(r) = \sup_{|z|=r} \{|f(z)|\}$. Wykazać, że jeśli $f(0) \neq 0$, to liczba różnych pierwiastków funkcji f w kole $\{|z| \leq \frac{1}{3}r\}$ nie przekracza $\frac{\ln(M/|f(0)|)}{\ln(2)}$.

– Wsk: Niech $z_1, z_2, \dots, z_n$ pierwiastki f , $|z_i| \leq \frac{r}{3}$. Pokazać, że dla $g(z) = f(z)/\prod(z - z_i)$ mamy $|g(0)||z_1| \dots |z_n| \leq \max_{|z|=r} |g(z)|(\frac{r}{3})^n$.

– Zmodyfikować to zadanie, tak aby otrzymać ograniczenie na ilość zer funkcji w dysku o promieniu $r' < r$ (nie koniecznie $r' = \frac{1}{3}r$).

65 Niech f będzie funkcją holomorficzną na otoczeniu dysku domkniętego o środku w 0 i promieniu R . Niech $r < R$. Wykazać, że

$$\sup\{|f(z) - \frac{1}{z}| : r \leq |z| \leq R\} \geq \frac{1}{R}.$$

Wynioskować, że $\frac{1}{z}$ w pierścieniu $r \leq |z| \leq R$ nie jest granicą jednostajną ciągu wielomianów.

66 Niech $P(z)$ będzie wielomianem stopnia n . Wykazać, że poziomica $|P(z)| = a$ nie może mieć więcej niż n składowych. (dokończyć dla przypadku gdy poziomica nie jest gładką krzywą korzystając z faktu, że każda funkcja holomorficzna po zamianie układu współrzędnych jest postaci $a + z^n$)

– Jak może wyglądać konfiguracja krzywych na płaszczyźnie opisanych równaniem $|P(z)| = a$? Czy jest możliwe by jeden okrąg był wewnątrz drugiego okręgu?

67 Funkcja holomorficzna f przekształca dysk jednostkowy $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ w siebie, ponadto $f(0) = 0$. Wykazać, że $|f(z)| \leq |z|$ i $|f'(0)| \leq 1$. Pokazać, że jeśli w pewnym punkcie $z_0 \neq 0$ zachodzi równość $|f(z_0)| = |z_0|$, to $f(z)$ jest postaci ξz gdzie $|\xi| = 1$.

68 Niech $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ będzie funkcją holomorficzną, taką, że

– f jest bijekcją,

– 0 jest punktem stałym f .

Wykazać, że $f(z)$ jest postaci ξz gdzie $|\xi| = 1$.

na 26 maja

69 Wykazać, że jeśli funkcja holomorficzna $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ma dwa punkty stałe, to $f(z) = z$.

70 Wykazać, że jeśli funkcja $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ jest holomorficzną, to mamy

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Wsk. Rozpatrzyć złożenie $h \circ f \circ g$, gdzie $g(z) = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$ i $h(z) = \frac{z-f(z_0)}{1-\bar{f}(z_0)z}$.

71 Dana funkcja holomorficzna $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ spełniająca $f(0) = 0$ i $\operatorname{Re}(f(z)) < 1$. Wykazać, że

$$|f(z)| \leq \frac{2|z|}{1 - |z|}.$$

72 Niech $f : \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{H}_+$ będzie funkcją holomorficzną. Wykazać, że $|f'(i)| \leq \operatorname{Im}(f(i))$.

Wsk. Użyć homografii postaci $\frac{z-a}{z-\bar{a}}$.

73 Opisać wszystkie holomorfe bijekcje (tzn holomorfe automorfizmy) otwartego dysku jednostkowego.

74 Niech $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ będzie funkcją holomorfe. Udowodnić dla dowolnej pary punktów $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1}z_2} \right|$$

$$\frac{|f'(z_1)|}{1 - |f(z_1)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z_1|^2}.$$

75 Opisać wszystkie holomorfe automorfizmy $\mathbb{H}_+$.

76 Niech $f : \mathbb{H}_+ \rightarrow \mathbb{H}_+$ będzie funkcją holomorfe. Udowodnić dla dowolnej pary punktów $z_1, z_2 \in \mathbb{H}_+$

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{\overline{f(z_1)} - f(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{\overline{z_1} - z_2} \right|$$

$$\frac{|f'(z_1)|}{\operatorname{im}(f(z_1))} \leq \frac{1}{\operatorname{im}(z_1)}.$$

77 Udowodniliśmy, że

$$\xi(1-s) = \xi(s),$$

gdzie

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) \zeta(s).$$

Obliczyć wartość

$$\zeta(-1) = „1+2+3+4+5+\dots”.$$

78 Załóżmy, że funkcja $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ postaci $h(z) = z^{-1} + c_1z + c_2z^2 + \dots$ jest różnowartościowa na dysku jednostkowym. Wykazać

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 < 1.$$

Wsk. Wyrazić całkę $\int_{|z|=r} \overline{h(z)} h'(z) dz$ poprzez współczynniki c_n i skorzystać z zadania 48.

79 Pokazać, że jeśli funkcja $g(z) = z + b_2z^2 + b_3z^3 \dots$ jest różnowartościowa na dysku jednostkowym, to $|b_2| < 2$.

Wsk: pokazać, że istnieje funkcja $k(z)$ spełniająca $k(z)^2 = g(z^2)$. Zastosować poprzednie zadanie do funkcji

$$\frac{1}{k(z)} = z^{-1} - \frac{1}{2}b_2z + \dots$$

80 Niech $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie różnowartościową funkcją. Wykazać, że $f(\mathbb{D})$ zawiera dysk o środku w $f(0)$ i promieniu $|f'(0)|/4$.

Wsk. Założyć $f'(0) = 1$. Dla $w \notin f(\mathbb{D})$ rozważyć funkcję $g(z) = \frac{wf(z)}{w-f(z)}$, wykazać, że jest różnowartościowa na dysku i skorzystać z poprzedniego zadania.

81 Rozwinąć w szereg Laurenta funkcję $\frac{1}{z(z-1)^2}$ w pierścieniu $0 < |z| < 1$ i w pierścieniu $1 < |z|$.

82 Rozwinąć w szereg Laurenta funkcję $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ w pierścieniu $1 < |z| < 2$ i w pierścieniu $2 < |z|$.

83 Rozwinąć w szereg Laurenta na pierścieniach wokół zera funkcję $\frac{1-z^2}{(1-iz)(1+iz)}$.

84 Na których pierścieniach wokół zera funkcja $\sqrt{\frac{z}{(z+1)(z+2)}}$ jest jednowartościowa? Tam gdzie jest jednowartościowa rozwinąć w szereg Laurenta.

85 Jakiego typu osobliwość ma funkcja $\sin(\frac{1}{z})$ w $z = 0$.

86 Wykazać, że ∞ dla funkcji $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jest biegunem rzędu n wtedy i tylko wtedy, gdy f jest wielomianem stopnia n .

87 Niech $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną. Wykazać, że jeśli $g(z) = f(1/z)$ ma w zerze osobliwość pozorną lub biegun, to f jest wielomianem.

88 Wyznaczyć liczbę pierwiastków funkcji $z^{87} + 36z^{57} + 71z^4 + z^3 - z + 1$ w kole a) $|z| \leq 1$ b) $|z| \leq 2$.

Wsk. Dany otwarty zbiór ograniczony $U \subset \mathbb{C}$ z regularnym brzegiem. Funkcja holomorficzna f i 1-parametrowa rodzina funkcji holomorficznych $g_t, t \in [0, 1]$ (w sposób ciągły zależna od parametru) są określone na otoczeniu $\bar{U}$. Przy czym $g_0(z) = 0$. Załóżmy, że dla każdego t oraz $z \in \partial U$ mamy $|f(z)| > |g_t(z)|$. Wtedy ilości pierwiastków f i $f + g_1$ w U są równe.

89 (PIS) Jaka jest liczba pierwiastków $f(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$ w pierścieniu $1 \leq |z| \leq 2$

90 Ile jest pierwiastków w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re}(z) > 0$ funkcji :

a) $z^4 + 8z^3 + 3z^2 + 8z + 3$

b) $z^5 - z + 16$

c) (PIS) $z^5 - z^3 + 8z^2 - 4z + 4$?

91 Niech f będzie funkcją holomorficzną na otoczeniu domkniętego dysku jednostkowego $\bar{D}$. Załóżmy, że $f(\bar{D}) \subset \operatorname{int}(D)$. Wykazać, że f ma dokładnie jeden punkt stały.

Wsk: $|(z - f(z)) - z| < |z|$

92 Niech $\bar{D} \subset U$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ funkcja holomorficzna, $|f|$ stałe na ∂D . Ponadto f' nie zeruje się na ∂D . Pokazać, że f ma w kole D o jedno zero więcej niż pochodna f' (zera liczone z krotnością).

93 Założenia j.w. Pokazać, że jeśli f' nie zeruje się na D to f jest różnowartościowa na $\operatorname{int}(D)$.

94 Zbadać całkę przy $r \rightarrow \infty$

$$\int_{\pm \operatorname{Im}(z) \geq 0, |z|=r} \frac{e^{\pm iz}}{z} dz$$

udowodnić, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi.$$

95 Obliczyć całkę $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{a+b \cos x} dx$ dla $0 < b < a$.

$2\pi/b^2(a - \sqrt{a^2 - b^2})$

96 Obliczyć całkę $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$.

$5/12\pi$

97 Obliczyć całkę $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a^4+x^4} dx$ dla $a > 0$.

$3\sqrt{2}\pi/(16a)$

98 Obliczyć całkę $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2+x^2} dx$ dla $a > 0$.

$\pi/(2a)e^{-a}$

99 Wykazać, że jeśli $f(z)$ jest funkcją meromorficzną na $\mathbb{C}$ z biegunami $a_1, a_2, \dots, a_m \notin \mathbb{Z}$ i jeśli $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$, to istnieje granica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N f(n) \quad \text{ i jest ona równa } \quad - \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{a_k} (\pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z).$$

Wsk. Całkować funkcję $\pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z$ po brzegu kwadratu o wierzchołkach $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$

100 Wykazać, że dla $a \notin i\mathbb{N}$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + a^2)^{-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a} \operatorname{ctgh} \pi a - \frac{1}{a^2} \right).$$

Czy można znaleźć w ten sposób sumę szeregu dla $a = 0$?

101 Za pomocą residuów wykazać, że dla dowolnych m parami różnych liczb $z_1, z_2, \dots, z_m$ zachodzi:

$$\sum_{k=1}^m \frac{z_k^{n+m-1}}{\prod_{\ell \neq k} (z_k - z_\ell)} = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_m=n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_m^{i_m}.$$

Wynioskować, że

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^m = m!.$$