Algebra I

Bardzo dobrym źródłem zadań (ze wskazówkami do rozwiązań) jest
M. Bryński, J. Jurkiewicz - Zbiór zadań z algebry, dostępny w bibliotece.

Moje zadania dla studentów z *:
https://www.mimuw.edu.pl/%7Eaweber/zadania/algebra2014/grupyzad.pdf

Termin pierwszego kolokwium: 23 listopada, godzina 16.00.

Zadania

1 Znaleźć wszystkie możliwe tabelki działań grupowych na zbiorze 4-elementowym.

2 Wykazać, że jeśli $g^2 = 1$ dla każdego elementu g, to grupa jest abelowa.

3 Wykazać, że jeśli każdy element grupy G jest rzędu conajwyżej 2, to $|G| = 2^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$.

4 Ile elementów ma grupa macierzy odwracalnych $n \times n$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{Z}_p$?

5 Sporządzić tabelkę działań dla grupy D_{2n}.

6 Sprawdzić, że w grupie D_{2n}, dla $n > 2$ istnieje tylko jedna podgrupa cykliczna rzędu n.

7 W grupie S_6 policzyć złożenie $(123)(546)(231)(46)$ przedstawiając je w postaci iloczynu cykli rozłacznych.

8 Cykl (453687) przedstawić w postaci transpozycji.

9 Permutację zbioru siedmioelementowego $f(1) = 4,\ f(2) = 2,\ f(3) = 6,\ f(4) = 3,\ f(5) = 1,\ f(6) = 7,\ f(7) = 5$ rozłożyć na cykle rozłączne.

10 Znaleźć rzędy grup izometrii brył platońskich.

---

11 Wskazać rozkład D_8 na sumę teoriomnogościową swoich trzech podgrup właściwych. Uzasadnić, że żadna grupa nie jest sumą dwóch swoich podgrup właściwych.

12 Podać przykład podgrupy $H \subset D_6$ i elementu x takiego, że $xH \neq Hx$.

13 W grupie macierzy odwracalnych $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ znaleźć element rzędu 3.

14 W grupie macierzy górnotrójkątnych o współczynnikach w $\mathbb{Z}$ rozmiaru 2×2 wskazać dwa elementy rzędu 2, których iloczyn ma rząd nieskończony.

15 Jakie są największe rzędy elementów w grupach permutacji S_9 i S_{15}.

16 Czy w S_{10} istnieją dwa elementy rzędu n, które mają różne rozkłady na cykle rozłączne? a) $n = 12$, b) $n = 9$.

17 Wypisać rzędy elementów w grupie cyklicznej C_{12} (oznaczanej też przez $\mathbb{Z}_{12}$) i w D_{24}. Podać ile jest elementów danego rzędu.

18 Niech $|G| < \infty$. Wykazać, że ilość elementów rzędu pierwszego p jest podzielna przez $p - 1$.

19 a) Niech $Q_8 = \langle a, b \rangle \subset GL_2(\mathbb{C})$, $a = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ile elementów ma ta grupa? Opisać wszystkie podgrupy i znaleźć rzędy elementów.
b) Ile elementów ma grupa $\langle c, b \rangle \subset GL_2(\mathbb{C})$, $c = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$? Czy zawiera grupę Q_8?

20 Wymienić wszystkie znane grupy rzędu 8. Roztrzygnąć, które są izomorficzne.

21 Opisać z dokładnością do izomorfizmu grupy 6-cio elementowe.

22 Rozważmy grupy $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$=(pierwiastki z 1 stopnia p^n dla pewnego $n \in \mathbb{N}$), gdzie p jest ustaloną liczbą pierwszą. Udowodnić, że wśród tych grup żadne dwie nie są izomorficzne.

23 (*) Uzasadnić, że grupa permutacji parzystych A_5 jest izomorficzna z grupą izometrii zachowujących orientację dwudziestościanu foremnego I_{60}.

24 (*) Podać przykład grupy skończenie generowanej i jej podgrupy, która nie jest skończenie generowana.

25 Niech $f : G \to H$ będzie homomorfizmem grup. $a \in G$. Wykazać, że $o(f(a))$ dzieli $o(a)$ o ile ten drugi jst skonczony

26 Opisać homomorfizmy $f : G \to H$ gdzie G jest grupą cykliczną.

27 Zbadać grupę automorfizmów $Aut(G)$ grupy cyklicznej G. Opisać grupy $Aut(C_n)$, $n = 13,\ 21,\ 26,\ 28.$ Przedstawić je jako produkty grup cyklicznych.

28 (*) Czy istnieje grupa cykliczna G taka, że $Aut(G) \simeq C_8$?

29 Udowodnić, że jeśli $(n, m) = 1$, to $C_{nm} = C_n \times C_m$.

30 Opisać te grupy dla $G = C_n$, $n = 15,\ 16,\ 20,\ 24,\ 30.$ Przedstawić je jako produkty grup cyklicznych. (Wskazówka: jeśli $(m, n) = 1$ to $Aut(\mathbb{Z}_{mn}) \simeq Aut(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n) \simeq Aut(\mathbb{Z}_m) \times Aut(\mathbb{Z}_n)$.)

31 (*) Udowodnić, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to $Aut(C_p) \simeq C_{p-1}$.

---

32 Grupa multiplikatywna ciała liczb zepolonych $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ działa na $\mathbb{C}$ poprzez mnożenie. Znaleźć orbity tego działania i stabilizatory punktów.

33 Rozważyć działanie podgrupy $G \subset \mathbb{C}^*$ na $\mathbb{C}$ (patrz poprzednie zadanie). Znaleźć orbity tego działania i stabilizatory punktów dla
a) $G = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$,
b) $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
c) $G = \mathbb{R}_{>0}$
d) $G = C_n$ (pierwiastki z 1 stopnia n).

34 Grupa izometrii liniowych przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest oznaczana przez $O(n)$. Opisać orbity i stabilizatory punktów dla naturalnego działania $O(n)$ na $\mathbb{R}^n$.

35 Grupę diagonalnych odwracalnych macierzy $n \times n$ o współczynnikach w dowolnym ciele K oznaczmy przez $T_n(K)$. Grupa ta działa na K^n poprzez mnożenie po współrędnych. Opisać orbity i stabilizatory punktów.

36 Grupa $GL_n(\mathbb{C})$, tzn. macierzy odwracalnych $n \times n$ o współczynnikach w $\mathbb{C}$ działa na zbiorze wszystkich macierzy $n \times n$ poprzez sprzęganie:

$$C \cdot A := CAC^{-1}\,.$$

Opisać orbity działania.

37 Grupa macierzy odwracalnych $n \times n$ o współczynnikach w $\mathbb{R}$ działa na zbiorze symetrycznych macierzy w następujący sposób:

$$C \cdot A := CAC^T\,.$$

Opisać orbity działania.

38 Grupa macierzy izometrii $O(n)$ działa na zbiorze symetrycznych macierzy w następujący sposób:

$$C \cdot A := CAC^T .$$

Opisać orbity i stabilizatory punktów.

39 Niech $G < S_4$. Rozpatrzmy naturalne działanie G na zbiorze $\{1,2,3,4\}$. Znaleźć orbity tego działania i grupy izotropii każdego punktu gdy $G = \langle(123)\rangle$ i $G = A_4$ (grupa parzystych permutacji).

40 Czy grupa rzędu 27 może działać na zbiorze 35 elementowym bez punktow stałych?

41 Niech grupa skończona G dziala na skończonym zbiorze X . Udowodnić wzór Burnside'a:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|,$$

gdzie $|X/G|$ oznacza liczbę orbit dzialania G na X zaś $|X^g|$ liczbę punktów stałych przekształcenia wyznaczonego przez $g \in G$.

42 Niech G będzie grupą izometrii sześcianu (a co za tym idzie, ośmiościanu formnego). Znaleźć stabilizatory wierzchołków, krawędzi i ścian obu tych brył.

43 Przypuśćmy, że grupa G działa tranzytywnie na zbiorze X. Wykazać, że grupy izotropii G_x i G_y dla $x, y \in G$ są sprzężone (tzn $\exists g \in G\ gG_xg^{-1} = G_y$).

44 Niech $H < G$ i niech $\rho^H : G \to S_{|G/H|}$ będzie homomorfizmem odpowiadającym działaniu G na zbiorze warstw G/H danym wzorem: $g(g'H) = gg'H$. Znalezc $ker(\rho^H)$.

45 Niech $k(G)$ oznacza liczbę klas sprzężonosci elementow grupy G. Udowodnic, że jeżeli G jest skonczoną grupą nieprzemienną to $k(G) > |Z(G)| + 1$.
(Definicja: Centrum grupy $Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G\ gh = hg\}$.)

46 Ile jest homomorfizmów z Z_{24} do D_{12}? (**Uwaga: zgodnie z konwencją przyjętą na wykładzie D_n oznacza grupę izometrii n-kąta formenego.**)

47 Przypuśćmy, że grupa G ma pq elementów, gdzie p i q są liczbami pierwszymi, p nie dzieli $q - 1$. Udowodnić, że jeśli w G jest tylko jedna podgrupa rządu q, to G jest cykliczna.

---

48 Czy $D_4 = Q_8$? Opisać wszystkie homomorfizmy $D_4 \to Q_8$.

49 Znaleźć centralizator $g \in S_6$ gdy
– $g = (123)(45) \in S_6$,
– $g = (123)(456) \in S_6$,
– $g = (12)(34)(56) \in S_6$.
(Definicja: Centralizator elementu $C_G(g) = \{h \in G \mid \forall h \in G\ gh = hg\}$.)

50 Udowodnić, że dla $n > 2$, $Z(S_n) = 1$.

51 Wyznaczyć klasy sprzężoności elementów S_4 oraz A_4. Wskazać dwa elementy A_4, które se sprzężone w S_4, a nie są sprzężone w A_4.

52 (a) Znaleźć $Z(A_4)$.
b) Wykazac, że w A_4 istnieje tylko jedna podgrupa rzędu 4, więc jest ona normalna.
c) Udowodnić, że w A_4 nie istnieje podgrupa rzędu 6.

Napis $H \triangleleft G$ oznacza, że H jest dzielnikem normalnym w G

53 Niech $H \triangleleft G$. Udowodnic, ze dla dowolnych $x, y \in G$ jeżeli $xy \in H$ to $yx \in H$. Podac przykład, że jeżeli tylko $H < G$ to wynikanie nie ma miejsca.

54 Pokazać, że każda podgrupa w Q_8 jest normalna, choć Q_8 nie jest abelowa.

55 Udowodnić, że jeżeli $K \triangleleft G$ to $Z(K) \triangleleft G$. Podać przykład, w którym $Z(K) \neq K \cap Z(G)$.

56 Udowodnić, ze jeżeli $[G, G] \leq H$, to podgrupa H jest normalna w G.

57 Komutant $[G, G]$ oznacza podgrupę generowaną przez zbiór $\{ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G\}$. Udowodnić, że dla każdej trójki elementów $g, h, k \in G$ mamy $ghkg^{-1}h^{-1}k^{-1} \in [G, G]$.

58 Niech A będzie grupą abelową. Wykazać, że dla dowolnej grupy G mamy naturalną bijekcję $Hom(G, A) \simeq Hom(G/[G, G], A)$.

59 Wykazać, że jeśli $|G| = p^2$, gdzie p jest liczbą pierwszą, to G jest abelowa.

60 Niech G będzie grupą, zaś p będzie najmniejszym dzielnikiem pierwszym $|G|$. Podgrupa H jest taka, że $|G| : |H| = p$. Pokaż, że H jest normalna.
Wskazówka: 1) rozważ standardowe działanie G na warstwach grupy H. Działanie to daje odwzorowanie $H \subset G \to S_{|G|/|H|} = S_p$.
2) Zobacz, że działanie podgrupy H ma punkt stały.
3) Ile elementów mogą mieć orbity działania H?
4) Wywnioskuj, że jego jądro homomorfizmu $G \to S_p$ jest równe H.
5) Skorzystaj z równoważności $hgH = gH \iff h \in gHg^{-1}$. .

Grupy ilorazowe

61 Podać przykład grupy G i jej podgrup $K \triangleleft G$, $H \triangleleft G$ takich, że $K \simeq H$ ale $G/K \not\simeq G/H$.

62 Podac przyklad grupy G i jej podgrup $K \triangleleft G$, $H \triangleleft G$ takich, że $G/K \simeq G/H$ ale $K \not\simeq H$.

63 Niech $n > 2$. Udowodnić, że jeżeli n jest nieparzyste, to $Z(D_n) = 1$, zaś jeżeli n jest parzyste to $|Z(D_n)| = 2$. Udowodnić, że w ty mostatnim przypadku $D_n/Z(D_n) \simeq D_{\frac{n}{2}}$ dla $n > 6$ i dla n = 4 mamy $D_4/Z(D_4) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

64 Niech $n > 2$. Udowodnić, że $|D_n/[D_n, D_n]| = 4$ jeżeli n jest parzyste i $|D_n/[D_n, D_n]| = 2$ jeżeli n jest nieparzyste.

65 Udowodnić, że nie istnieje grupa nieprzemienna G taka, że $G/Z(G)$ jest cykliczna.

66 Niech $K \triangleleft (G)$ i $|G/H| = n < \infty$. Pokazać, że
(a) dla każdego $g \in G$ mamy $g^n \in K$,
(b) jeśli $g \in G$, $g^m \in K$ oraz $(m, n) = 1$, to $g \in K$.

---

67 * Udowodnić, że grupa zachowujących orientację $\mathbb{R}^3$ izometrii sześcianu jest izomorficzna z grupą S_4.

68 * Udowodnić, że jeżeli G jest grupą nieabelową, to $Aut(G)$ nie jest grupą cykliczną. Udowodnić, że nie istnieje grupa G taka, że grupa $Aut(G)$ jest cykliczna rzędu nieparzystego różnego od 1.

69 * Niech G będzie grupą prostą (tzn nie ma podgrup normalnych), zaś $H \leq G$ podgrupą indeksu pierwszego p. Udowodni'c, że p jest największą liczbą pierwszą dziel ąc'a $|G|$ i że $p^2 \not| |G|$. (Wskazówka: rozpatrzeć działanie G na zbiorze warstw G/H i wykazaż, że $|G| \,|\, p!$.)

70 * Udowodnid, że jeżli G jest grupą nieprzemienną i $|G| = p^3$, to $|Z(G)| = p$ i liczba klas sprzężoności $k(G) = p^2 + p - 1$.

71 * Wskazać izomorfizm $GL_2(Z_3)/Z(GL_2(Z_3)) \simeq S_4$.

72 * (Lemat Grüna) Udowodnić, że jeżeli $[G, G] = G$ to $Z(G/Z(G))$ jest trywialne.

73 * Udowodnić, że $SL(2, \mathbb{Z}_5) = [SL(2, \mathbb{Z}_5), SL(2, \mathbb{Z}_5)]$. Znaleźć $Z(SL_2(\mathbb{Z}_5)$.

---

74 Znaleźć komutant $[A_4, A_4]$.

75 Skonstruować dziać działanie przechodnie grupy S_4 na zbiorze 3-elementowym X. Opisać jądro i obraz stowarzyszonego przekształcenia $\phi : S_4 \to S_3 = Aut(X)$. Jaki jest obraz $\phi(A_4)$?
Za X przyjąć zbiór podziałów zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ *na równe części.*

76 Wykazać, że jeśli p jest liczbą pierwszą, $|G| = p^k$, $\{1\} \neq N \lhd G$ to $N \cap Z(G) \neq \{1\}$.
Wsk: dowód taki sam jak dowów faktu, że centrum p-grupy jest nietrywialne.

77 Niech G będzie grupą rzędu p^r (gdzie p jest liczbą pierwszą). Pokazać, że liczba podgrup grupy G, które nie są normalne jest podzielna przez p.

78 Niech $|G| = 2p$, gdzie p jest liczbą pierwszą, $p > 2$. Udowodnić, że G jest albo grupą cykliczną, albo dihedralną.

79 Wykazać, że nieprzemienna grupa rzędu 8 jest izomorficzna albo z Q_8 albo z grupą dihedralną.

80 Czy istnieje monomorfizm $Q_8 \to S_4$?

81 Nich p będzie liczbą pierwszą oraz $G \subset GL_3(\mathbb{Z}_p)$ grupą macierzy odwracalnych górnotrójkątnych z jedynkami na przekątnej. Opisać z dokładnością do izomorfizmu wszystkie ilorazy G.

82 Niech G będzie grupą wszystkich afinicznych izomorfizmów $\mathbb{Z}_2^2$.
– Wykazć, że H, grupa złożona z przesunięć, jest normalna.
– Opisać G/H.
– Wykazać, że $G \simeq A_4$.

83 Pokazać, że jeśli jest dany homomorfizm $\phi : Q_8 \to G$ taki, że $\phi(-1) \neq 1$, to ϕ jest monomorfizmem.

84 Niech T będzie podgrupą $GL_n(\mathbb{C})$ złożoną z macierzy diagonalnych. Znaleźć zbiór macierzy $A \in GL_n(\mathbb{C})$ takich. że dla każdej macierzy diagonalnej $D \in T$ mamy $ADA^{-1} \in T$. Wykazać, że jest to podgrupa zawierająca T. Jest ona oznaczana $N(T)$. Wykazać, że T jest podgrupą normalną w $N(T)$ i zbadać iloraz $N(T)/T$. Wykazać, że $N(T)/T \simeq S_n$.