Zadania domowe na ~~19 grudnia~~ 21 grudnia g. 14:15

(proszę zostawić zadania w kopercie na moich drzwiach - pokój 5560)

Zadanie 1
Czy istnieje funkcja liniowa $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taka, że

$$f((1,2,-3)) = (-4,-4,-4)\,, \qquad f((3,2,-4)) = (-5,-2,1)\,, \qquad f((1,-2,1)) = (0,0,0)\,, \qquad f((1,1,1)) = (6,15,24)\,?$$

Jeśli istnieje, to podać jej wzór we we współrzędnych. Uzasadnić, że f jest wyznaczona jednoznacznie. Znaleźć obrazy standardowych wektorów bazowych. Wypisać macierz przekształcenia.

Zadanie 2
Dana jest funkcja liniowa $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zadana wzorem

$$f((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 10x_4, 3x_1 + 4x_3 - 2x_4, -4x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 9x_4)\,.$$

Znaleźć bazy jądra i obrazu. Opisać równaniami obraz.

Zadanie 3
Dana jest funkcja liniowa $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ zależna od parametru $r \in \mathbb{R}$. Funkcja jest zadana wzorem

$$f((x_1,x_2,x_3)) = (2x_1 + 6x_3, x_1 + 2x_2 + 5x_3, rx_2 + x_1 + 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + 4x_3)\,.$$

Dla jakiego parametru r ta funkcja jest monomorfizmem? Jeśli dla pewnego parametru nie jest monomorfizmem, to znaleźć bazę jądra.

Zadanie 4
Dane są trzy monomorfizmy $f, g, h : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^7$. Czy istnieje wektor niezerowy $\beta \in \mathbb{C}^7 \setminus \{0\}$ oraz wektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}^5$ takie, że

$$f(\alpha_1) = \beta\,, \qquad g(\alpha_2) = \beta\,, \qquad h(\alpha_3) = \beta\,.$$