Zadania domowe na 14 listopada

Zadanie 1
Rozważamy zbiór liczb rzeczywistych jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{Q}$. Udowodnić, że układ $\left\{1,\ \sqrt[3]{7},\ (\sqrt[3]{7})^2\right\}$ jest liniowo niezależny.

Zadanie 2
Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem p-elementowym oraz niech $W_1, W_2, W_3 \subset V$ będą właściwymi podprzestrzeniami liniowymi.

- Załóżmy, że $2 < p < \infty$ oraz $|V| < \infty$. Udowodnić, że $|W_1 \cup W_2 \cup W_3| < |V|$.
- Wskazać przykład trzech właściwych podprzestrzeni liniowych W_1, W_2, W_3 takich, że $W_1 \cup W_2 \cup W_2 = V$.
- Uzasadnić, że jeśli ciało bazowe ma co najmniej 3 elementy (np. nieskończenie wiele elementów), to nie istnieją podprzestrzenie W_1, W_2, W_3 o powyższych własnościach.

Zadanie 3
Dane są cztery wektory w $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 2, 1)$, $w_1 = (2, 3, 4)$, $w_2 = (2, a, 0)$. W zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$ opisać układem równań liniowych przestrzeń $V \cap W$, gdzie $V = lin(v_1, v_2)$ $W = lin(w_1, w_2)$.

Zadanie 4
Dane są 3 wektory w $\mathbb{C}^4$ $u = (5, 3, 7, t)$, $v = (1, 3, 3, 4)$, $w = (2, 3, 4, 1)$. W zależności od parametru $t \in \mathbb{C}$ orzec czy te wektory są niezależne. Znaleźć bazę przestrzeni rozpiętej przez wektory $u,\ v,\ w$.